# CALCOLO NUMERICO
## Corso di Laurea in Informatica
## A.A. 2018/2019 – Correzione Prova Scritta del 22/01/2019

NOME COGNOME MATRICOLA

**Esercizio 1**

1. Se $\| \boldsymbol{x} \|_1 < 1$ allora $A_n$ è predominante diagonale.

2. Per il metodo di Gauss-Seidel si trova $M^{-1} = I_n - \boldsymbol{e}_n^T \boldsymbol{x}$ da cui $P = M^{-1}N = -\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_n^T + \| \boldsymbol{x} \|_2^2 \, \boldsymbol{e}_n \boldsymbol{e}_n^T$. La matrice $P$ risulta pertanto triangolare inferiore con elementi diagonali $O$ e $\| \boldsymbol{x} \|_2^2$. Si deduce quindi che $\rho(P) = \| \boldsymbol{x} \|_2^2 < 1$ è condizione necessaria e sufficiente per la convergenza del metodo.

3. $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leq |x_1| + \ldots |x_n|$ se e solo se $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq (|x_1| + \ldots |x_n|)^2$ se e solo se $0 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n |x_i x_j|$. Per l'altra implicazione si prende ad esempio $\boldsymbol{x} = (1/n, \ldots, 1/n)$. Si ha $\| \boldsymbol{x} \|_1 = 1$ mentre $\| \boldsymbol{x} \|_2 = \sqrt{(}1/n) < 1$.

4.
```
function[y]=gs(b,x, x0)
n=length(b);
for k=1:n
   x0(k)=b(k)-x(k)*x0(n);
end
for k=1:n-1
   y(k)=x0(k);
end
y(n)=x0(n)-sum(y(1:n-1).*x(1:n-1));
end
```

**Esercizio 2**

1. Si ha $f \in C^2(I)$, $I = [-8, -7]$, $f'(x) = 3x^2 + 14x$ e $f''(x) = 6x + 14$ da cui $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0 \; \forall x \in I$. Da $f(-8) < 0$ e $f(-7) > 0$ si conclude per il teorema di esistenza degli zeri che esiste unica $\alpha \in I$ tale che $f(\alpha) > 0$.

2. Assumendo $\alpha \leq x_k \leq -7$ si ha

$$x_{k+1} - x_k = \frac{f(a)x_k - f(x_k)a}{f(a) - f(x_k)} - x_k = \frac{f(x_k)(x_k - a)}{f(a) - f(x_k)} < 0,$$

ed inoltre

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{f(a)(x_k - \alpha) + f(x_k)(\alpha - a)}{f(a) - f(x_k)}.$$

La retta passante per $(a, f(a))$ e $(x_k, f(x_k))$ ha equazione

$$y = r(x) = \frac{f(a)(x_k - x)}{x_k - a} + \frac{f(x_k)(x - a)}{x_k - a}$$

da cui per la concavità di $f(x)$ si ottiene

$$r(\alpha) = \frac{f(a)(x_k - \alpha)}{x_k - a} + \frac{f(x_k)(\alpha - a)}{x_k - a} \leq 0,$$

e quindi $x_{k+1} - \alpha \geq 0$. Alternativamente le proprietà potevano essere giustificate graficamente. Per induzione si mostra quindi che la successione $\{x_k\}$ è monotona non crescente e quindi ammette limite che è uno zero di $f(x)$ e quindi coincide con $\alpha$.

3.
```
function [x0] = inf_22012019(tol)
f=@(x)x^3 +7*x^2 +9;
a=-8;
x0=-7;
f0=f(x0); fa=f(a);
while(abs(f0)>tol)
    x0=(fa*x0-f0*a)/(fa-f0);
    f0=f(x0);
end
```

Per $tol = 1.0e-12$ si ottiene $x0 = -7.174831274826153e+00$.