LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2018-2019
Secondo Appello - 11/02/2019 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si dica se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va prodotto un controesempio che rende la formula falsa.

1. $(S \Rightarrow R) \;\wedge\; \neg(P \vee S \Rightarrow \neg Q) \;\Rightarrow\; \neg(P \Rightarrow Q) \vee R$
2. $(S \vee Q \Rightarrow R) \;\wedge\; (\neg P \vee S \Rightarrow Q) \;\Rightarrow\; \neg(P \Rightarrow Q) \vee R$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula non è una tautologia. Un possibile controesempio è: $P = \mathbf{T}$, $Q = \mathbf{T}$, $R = \mathbf{F}$ e $S = \mathbf{F}$.
2. La formula è una tautologia, di cui presentiamo due dimostrazioni. La prima usa ipotesi non tautologiche,:

$\underline{\neg(P \Rightarrow Q)} \vee R$

$\equiv \quad \{(\neg\text{-}\Rightarrow)\}$

$(P \wedge \neg Q) \vee \underline{R}$

$\Leftarrow \quad \{$**Ip:** $S \vee Q \Rightarrow R$, occorrenza positiva$\}$

$\underline{(P \wedge \neg Q)} \vee Q \vee S$

$\equiv \quad \{$(Complemento)$\}$

$P \vee \underline{Q} \vee S$

$\Leftarrow \quad \{$**Ip:** $\neg P \vee S \Rightarrow Q$, occorrenza positiva$\}$

$\underline{P \vee \neg P} \vee S \vee S$

$\equiv \quad \{$(Terzo escluso) (Zero)$\}$

$\mathbf{T}$

La seconda dimostrazione parte invece dalla premessa. Si osservi che la conseguenza è equivalente alla formula $(P \wedge \neg Q) \vee R$:

$(\underline{S \vee Q \Rightarrow R}) \;\wedge\; (\underline{\neg P \vee S \Rightarrow Q})$

$\equiv \quad \{$(Elim-$\Rightarrow$) e (De Morgan), due volte)$\}$

$\underline{((\neg S \wedge \neg Q) \vee R) \;\wedge\; ((P \wedge \neg S) \vee Q)}$

$\equiv \quad \{$(Distributività)$\}$

$(\neg S \wedge \underline{\neg Q \wedge ((P \wedge \neg S) \vee Q)}) \vee (R \;\wedge\; ((P \wedge \neg S) \vee Q))$

$\equiv \quad \{$(Complemento)$\}$

$(\neg S \wedge \underline{\neg Q \wedge P} \wedge \neg S) \vee (\underline{R} \;\wedge\; ((P \wedge \neg S) \vee Q))$

$\Rightarrow \quad \{$(Sempl-$\wedge$), due volte)$\}$

$(P \wedge \neg Q) \vee R$

ESERCIZIO 2
Si consideri l'alfabeto del primo ordine $\mathcal{A}$ con simboli di predicato $\mathcal{P} = \{F(-), T(-), \mathit{Friend}(-,-), \mathit{Follow}(-,-)\}$ e l'interpretazione $I = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è un insieme di persone, e

- $\alpha(F)(x)$ è vera se e solo se la persona x è un utente di Facebook,
- $\alpha(T)(x)$ è vera se e solo se la persona x è un utente di Twitter,
- $\alpha(\mathit{Friend})(x,y)$ è vera se e solo se la persona x *è amica* su Facebook della persona y,
- $\alpha(\mathit{Follow})(x,y)$ è vera se e solo se la persona x *segue* su Twitter la persona y,

Formalizzare usando l'alfabeto $\mathcal{A}$ e l'interpretazione I, il fatto che la relazione di *amicizia* su Facebook è simmetrica, mentre la relazione *segue* su Twitter non lo è. Più precisamente, formalizzare il seguente enuciato:

"Dati due utenti qualunque di Facebook, se il primo è amico del secondo, anche il secondo è amico del primo. Invece su Twitter ci sono almeno due utenti tali che il primo segue il secondo, ma non viceversa."

SOLUZIONE ESERCIZIO 2
L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$\big(\forall x\,.\,(\forall y\,.\,F(x) \wedge F(y) \;\Rightarrow\; (\mathit{Friend}(x,y) \Rightarrow \mathit{Friend}(y,x)))\big) \;\wedge\; \big(\exists x\,.\,(\exists y\,.\,T(x) \wedge T(y) \wedge \mathit{Follow}(x,y) \wedge \neg \mathit{Follow}(y,x))\big)$$

ESERCIZIO 3
Si provi che la seguente formula è valida (P, Q e R contengono la variabile libera x):

$$\neg\big(\;(\exists x\,.\,\neg R \wedge (P \vee R)) \;\vee\; \neg(\forall x\,.\,R \Rightarrow Q)\;\big) \;\Rightarrow\; (\forall x\,.\,P \Rightarrow Q)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Dimostriamo l'implicazione partendo dalla premessa:

$$\begin{array}{ll}
 & \underline{\neg\big((\exists x\,.\,\neg R \wedge (P \vee R)) \;\vee\; \neg(\forall x\,.\,R \Rightarrow Q)\big)} \\
\equiv & \{\text{(De Morgan), (Doppia negazione)}\} \\
 & \neg(\exists x\,.\,\underline{\neg R \wedge (P \vee R)}) \;\wedge\; (\forall x\,.\,R \Rightarrow Q) \\
\equiv & \{\text{(Complemento)}\} \\
 & \underline{\neg(\exists x\,.\,\neg R \wedge P)} \;\wedge\; (\forall x\,.\,R \Rightarrow Q) \\
\equiv & \{\text{(De Morgan) due volte, (Doppia negazione)}\} \\
 & \underline{(\forall x\,.\,R \vee \neg P) \;\wedge\; (\forall x\,.\,R \Rightarrow Q)} \\
\equiv & \{(\forall\text{-}\wedge)\} \\
 & (\forall x\,.\,\underline{(R \vee \neg P)} \wedge (R \Rightarrow Q)) \\
\equiv & \{\text{(Elim-}\Rightarrow\text{) al contrario}\} \\
 & (\forall x\,.\,\underline{(P \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow Q)}) \\
\Rightarrow & \{\text{(Transitività-}\Rightarrow\text{)}\} \\
 & (\forall x\,.\,P \Rightarrow Q)
\end{array}$$

ESERCIZIO 4
Si formalizzi il seguente enunciato (assumendo **a: array [0, n) of int** e **b: array [0, m) of int**):

"Ogni elemento pari dell'array **a** compare almeno due volte nell'array **b**"

SOLUZIONE ESERCIZIO 4
Presentiamo due soluzioni:

$$(\forall x\,.\,x \in [0,n) \wedge \mathit{pari}(a[x]) \Rightarrow \#\{i \colon i \in [0,m) \mid b[i] = a[x]\} \geq 2)$$

$$(\forall x\,.\,x \in [0,n) \wedge \mathit{pari}(a[x]) \Rightarrow (\exists i\,.\,(\exists j\,.\,i \in [0,m) \wedge j \in [0,n) \wedge i \neq j \wedge a[x] = b[i] \wedge a[x] = b[j])))$$

ESERCIZIO 5
Assumendo **a: array [0, n) of int**, si consideri il seguente frammento di programma annotato,

$\{x = 0 \ \wedge \ s = a[0]\}$
$\{\mathsf{Inv}\text{: } x \in [0, n) \ \wedge \ s = a[x] + x^2 + x \ \}\{\text{t: } n - x\}$
```
while x < n - 1 do
      x := x + 1;
      s := s + a[x] - a[x-1] + 2*x
endw
```
$\{s = a[n-1] + n^2 - n\}$

Si scrivano le ipotesi di progresso ed invarianza. Inoltre si dimostri l'ipotesi di invarianza.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Invariante $Inv : x \in [0, n) \ \wedge \ s = a[x] + x^2 + x$
Funzione di terminazione $t : n - x$

1. **Ipotesi di Invarianza**:

$\{x \in [0, n) \ \wedge \ s = a[x] + x^2 + x \ \wedge \ x < n - 1\}$
```
    x := x + 1;
    s := s + a[x] - a[x-1] + 2*x
```
$\{x \in [0, n) \ \wedge \ s = a[x] + x^2 + x \ \wedge \ def(x < n)\}$

2. **Ipotesi di Progresso**:

$\{x \in [0, n) \ \wedge \ s = a[x] + x^2 + x \ \wedge \ x < n - 1 \ \wedge \ n - x = V\}$
```
    x := x + 1;
    s := s + a[x] - a[x-1] + 2*x
```
$\{n - x < V\}$

Dimostriamo l'ipotesi di invarianza applicando la regola della Sequenza di comandi. Quindi dobbiamo trovare un'asserzione R per cui le seguenti due triple siano soddisfatte:

(1) $\{Inv \ \wedge \ x < n - 1\}$ `x := x + 1` $\{R\}$

(2) $\{R\}$ $\mathtt{s := s + a[x] - a[x-1] + 2 * x}$ $\{Inv \ \wedge \ def(x < n)\}$

Cominciamo con la tripla (2). Per l'Assioma dell'Assegnamento, abbiamo che la tripla è soddisfatta per

$$R = def(s + a[x] - a[x-1] + x) \wedge \big(x \in [0, n) \ \wedge \ s = a[x] + x^2 + x \ \wedge \ def(x < n)\big)[^{s+a[x]-a[x-1]+2*x}/_s]$$

Semplificando R otteniamo:

$def(s + a[x] - a[x-1] + x) \wedge \big(x \in [0, n) \ \wedge \ s = a[x] + x^2 + x \ \wedge \ def(x < n)\big)[^{s+a[x]-a[x-1]+2*x}/_s]$

$\equiv$ {(Definizione di def), (Unità)}

$x \in dom(a) \wedge x - 1 \in dom(a) \wedge \big(x \in [0, n) \ \wedge \ s = a[x] + x^2 + x \ \wedge \ def(x < n)\big)[^{s+a[x]-a[x-1]+2*x}/_s]$

$\equiv$ {(Sostituzione)}

$x \in dom(a) \wedge x - 1 \in dom(a) \wedge x \in [0, n) \ \wedge \ s + a[x] - a[x-1] + 2 * x = a[x] + x^2 + x \ \wedge \ def(x < n)$

$\equiv$ {(Calcolo), (Definizione di def)}

$x \in dom(a) \wedge x - 1 \in dom(a) \wedge x \in [0, n) \ \wedge \ s - a[x-1] + x = x^2$

Verifichiamo ora la tripla (1). Per la Regola dell'assegnamento la tripla è soddisfatta se vale l'implicazione

$$Inv \wedge x < n - 1 \ \Rightarrow \ def(x + 1) \wedge R[^{x+1}/_x]$$

e cioè:

$$x \in [0, n) \ \wedge \ s = a[x] + x^2 + x \ \wedge \ x < n - 1 \ \Rightarrow$$
$$def(x + 1) \wedge \big(x \in dom(a) \wedge x - 1 \in dom(a) \wedge x \in [0, n) \ \wedge \ s - a[x-1] + x = x^2\big)[^{x+1}/_x]$$

Verifichiamo quest'implicazione partendo dalla conseguenza:

$$def(x+1) \wedge \big(x \in dom(a) \wedge x-1 \in dom(a) \wedge x \in [0,n) \;\wedge\; s - a[x-1] + x = x^2\big)[^{x+1}/_x]$$

$\equiv$ {(Definizione di def), (Unità), Sostituzione}

$x+1 \in dom(a) \wedge x \in dom(a) \wedge x+1 \in [0,n) \;\wedge\; s - a[x] + x + 1 = (x+1)^2$

$\equiv$ {**Ip:** $x \in [0,n), dom(a) = [0,n), x < n-1$, (Unità)}

$s - a[x] + x + 1 = (x+1)^2$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $s = a[x] + x^2 + x\}$

$a[x] + x^2 + x - a[x] + x + 1 = (x+1)^2$

$\equiv$ {Calcolo}

T

ESERCIZIO 6

Si verifichi **solo la tripla relativa al ramo "then"** della seguente tripla di Hoare (assumendo **b: array [0, n) of int**):

$\{\ x \in [1,n) \;\wedge\; (\forall i\,.\, i \in [0,x) \Rightarrow b[i] \geq b[i-1])\ \}$

```
if b[x] < b[x-1]
   then b[x] := b[x-1]
   else skip
fi
```

$\{\ (\forall i\,.\, i \in [0,x] \Rightarrow b[i] \geq b[i-1])\}$

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Per la Regola del Condizionale, la tripla relativa al ramo **then** è la seguente:

$$\{x \in [1,n) \;\wedge\; (\forall i\,.\, i \in [0,x) \Rightarrow b[i] \geq b[i-1]) \;\wedge\; b[x] < b[x-1]\}$$
$$b[x] := b[x-1]$$
$$\{(\forall i\,.\, i \in [0,x] \Rightarrow b[i] \geq b[i-1])\}$$

Applicando la regola dell' **Aggiornamento Selettivo** dobbiamo verificare che:

$$x \in [1,n) \;\wedge\; (\forall i\,.\, i \in [0,x) \Rightarrow b[i] \geq b[i-1]) \wedge b[x] < b[x-1] \;\Rightarrow$$
$$def(b[x-1]) \wedge def(x) \wedge x \in dom(b) \wedge (\forall i\,.\, i \in [0,x] \Rightarrow b[i] \geq b[i-1])[^{\mathtt{c}}/_{\mathtt{b}}]$$

dove $\mathtt{c} = \mathtt{b}[^{\mathtt{b}[x-1]}/_x]$

Partiamo dalla conseguenza

$def(b[x-1]) \wedge def(x) \wedge x \in dom(b) \wedge (\forall i\,.\, i \in [0,x] \Rightarrow b[i] \geq b[i-1])[^{\mathtt{c}}/_{\mathtt{b}}]$

$\equiv$ {Definizione di def, (Unità), Sostituzione}

$x-1 \in dom(b) \wedge x \in dom(b) \wedge (\forall i\,.\, i \in [0,x] \Rightarrow c[i] \geq c[i-1])$

$\equiv$ {**Ip**: $x \in [1,n)$, (Unità)}

$(\forall i\,.\, i \in [0,x] \Rightarrow c[i] \geq c[i-1])$

$\equiv$ {(Intervallo-$\forall$), **Ip**: $x > 0$}

$(\forall i\,.\, i \in [0,x) \Rightarrow c[i] \geq c[i-1]) \;\wedge\; c[x] \geq c[x-1]$

$\equiv$ {definizione di $\mathtt{c}$, $i \neq x$ per ogni $i \in [0,x)$, $x-1 \neq x$}

$(\forall i\,.\, i \in [0,x) \Rightarrow b[i] \geq b[i-1]) \;\wedge\; b[x-1] \geq b[x-1]$

$\equiv$ {**Ip**: $(\forall i\,.\, i \in [0,x) \Rightarrow b[i] \geq b[i-1])$, calcolo }

T