Cognome Nome Matricola Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO
12/02/2019

Si ricorda che le funzioni Matlab richieste negli esercizi devono essere trascritte sui fogli consegnati poiché non sarà scaricato alcun file Matlab dai computer sui quali operate.

Esercizio 1. Sia $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e sia $A_{2n} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $n \geq 1$ una matrice triangolare superiore definita da

$$A_{2n}(2i-1:2i, 2j-1:2j) = \begin{cases} B & \text{se } i = 1, \ldots n \text{ e } j = i, \ldots, n \\ 0_2 & \text{se } i = 2, \ldots n \text{ e } j = 1, \ldots, i-1 \end{cases}$$

dove 0_2 è la matrice nulla di dimensione 2. Ad esempio, per $n = 4$ abbiamo

$$A_8 = \begin{bmatrix} B & B & B & B \\ 0_2 & B & B & B \\ 0_2 & 0_2 & B & B \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & B \end{bmatrix}.$$

1. Si dimostri che $\det(A_{2n}) = 3^n$.
2. Si dimostri che la matrice A_{2n} ammette fattorizzazione LU e si determinino i due fattori triangolari L_{2n} e U_{2n} .
3. Si scriva una function MatLab che, dato in input $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{2n}$, restituisce il vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ soluzione del sistema lineare $A_{2n}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ risolvendo i sue sistemi lineari triangolari $L_{2n}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ e $U_{2n}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Si analizzi il costo computazionale della funzione scritta e si fornisca il valore di $\|\boldsymbol{x}\|_1$ ottenuto a partire dal vettore `b=ones(100, 1)`.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f(x) = \sin(x) - (x-1)^2$.

1. Si dica quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 0$ e se ne diano gli intervalli di separazione.
2. Si studi il comportamento del metodo delle tangenti per l'approssimazione delle soluzioni, compreso scelta del punto iniziale e dell'ordine di convergenza.
3. Utilizzando la formula di Taylor si approssimi $\sin(x)$ con $x - x^3/6$ e si studi la convergenza del metodo delle tangenti per la risoluzione dell'equazione $g(x) = x - \frac{x^3}{6} - (x-1)^2 = 0$.
4. Scrivere una funzione Matlab che presi in input una funzione $h(x)$ e la sua derivata $h'(x)$, un punto x_0 e una tolleranza $tol \in \mathbb{R}$ calcola la successione generata dal metodo delle tangenti arrestandosi quando $|h(x_k)| \leq tol$ oppure se sono state eseguite 100 iterazioni. La funzione deve restituire in uscita il valore di x_k e il numero k di iterazioni effettuate. Riportare l'approssimazione ottenuta ed il numero di iterazioni effettuate partendo da $x_0 = \{-1, 10\}$ e $tol = 1.0e-12$ sia per la funzione $f(x)$ che per la funzione $g(x)$.
5. Si mostri che vale
$$|\sin(x) - (x - x^3/6)| \leq |R(x)| = \left|\frac{x^5}{5!}\right|, \forall x \in \mathbb{R}.$$
Si verifichi numericamente che detta $\tilde{\alpha}$ l'approssimazione della soluzione massima dell'equazione $f(x) = 0$ si ha $|f(\tilde{\alpha}) - g(\tilde{\alpha})| \leq |R(\tilde{\alpha})|$. Si riporti l'errore assoluto e la maggiorazione del resto.