CALCOLO NUMERICO

Corso di Laurea in Informatica

A.A. 2018/2019 – Correzione Prova Scritta del 14/02/2019

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

1. La matrice B ammette fattorizzazione LU definita da

$$B = L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Segue che A_{2n} può essere fattorizzata come

$$A_{2n} = \begin{bmatrix} L & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & \dots & \dots & U \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & U \end{bmatrix}.$$

La relazione descrive la fattorizzazione LU di A_{2n}. In particolare segue che

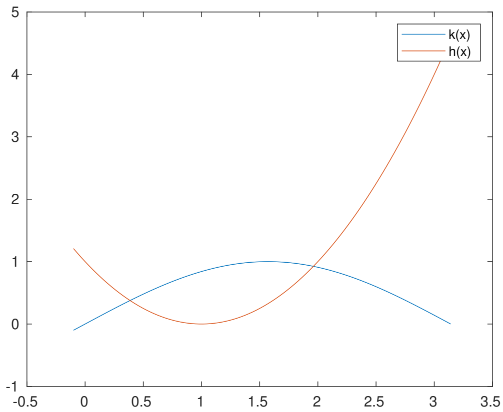
$$\det(A_{2n}) = \det(U_{2n}) = 2^n \left(\frac{3}{2}\right)^n = 3^n.$$

2.
```
function [x] = inf_14022019_1(b)
n2=length(b);
n=n2/2;
y=zeros(n2,1);
x=zeros(n2,1);
for k=1:n
    y(2*k-1)=b(2*k-1);
    y(2*k)=b(2*k)-0.5*y(2*k-1);
end
s_even=0;
s_odd=0;
t=3/2;
for k=n:-1:1
    x(2*k)=(y(2*k)-t*s_even)/t;
    x(2*k-1)=(y(2*k-1)-2*s_odd -s_even-x(2*k))/2;
    s_even=s_even+x(2*k);
    s_odd=s_odd+x(2*k-1);
end
end
```

L'algoritmo ha costo lineare in n. Per i dati di input assegnati si trova $\| \boldsymbol{x} \|_1 = 2/3$.

Esercizio 2

1. Tracciando i grafici delle funzioni $k(x) = \sin(x)$ e $h(x) = (x-1)^2$



   si verifica che l'equazione ammette due soluzioni reali denotate con α_1 e α_2 localizzate rispettivamente in $[0, 1]$ e $[\pi/2, 2]$.

2. Dal teorema di convergenza locale segue che il metodo delle tangenti è localmente convergente. Essendo $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f'(x) = \cos(x) - 2(x-1)$ e $f''(x) = -\sin(x) - 2 < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ segue che la convergenza è quadratica. Poichè $f'(x) = 0 \iff x = \beta \in (1, \pi/2)$ dal teorema di convergenza in grande segue che $\forall x_0 \leq \alpha_1$ il metodo genera successioni convergenti ad α_1 mentre $\forall x_0 \geq \alpha_2$ il metodo genera successioni convergenti ad α_2.

3. Tracciando il grafico di $g(x)$ si trova che l'equazione algebrica ammette tre soluzioni reali localizzate in $[-9, -2]$, $[0, 1]$ e $[\pi/2, 2]$ denotate con γ_0, γ_1 e γ_2. Il metodo è localmente convergente con convergenza quadratica. Per la convergenza globale si trova che $\forall x_0 \leq \gamma_0$ il metodo genera successioni convergenti a γ_0, $\forall x_0 \geq \gamma_2$ il metodo genera successioni convergenti a γ_2 e $\forall x_0 \in [0, \gamma_1)$ il metodo genera successioni convergenti a γ_1.

4.
```
function [x,k] = inf_14022019_2(f,f1,x0,tol)
k=0; fe=f(x0); err=abs(fe);
while(err>tol && k<100)
    x=x0-fe/f1(x0);
    fe=f(x);
    err=abs(fe);
    k=k+1;
    x0=x;
end
end
```
   Per $f(x) = \sin(x) - (x-1)^2$ si trova $(x, k) = (0.3862, 5)$ per $x_0 = -1$ e $(x, k) = (1.9616, 7)$ per $x_0 = 10$. Per $f(x) = (x - x^3/6) - (x-1)^2$ si trova $(x, k) = (0.3862, 5)$ per $x_0 = -1$ e $(x, k) = (1.8793, 9)$ per $x_0 = 10$.

5. Dallo sviluppo di Taylor di $\sin(x)$ con centro l'origine si ricava

$$|\sin(x) - (x - x^3/6)| = |\cos(\xi)x^5/120| \leq |x^5/120|.$$

   Per $\tilde{\alpha} = \alpha_2 = 1.9616$ si ottiene $|\sin(\tilde{\alpha}) - (\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}^3/6)| = 0.2210$ e $|R(\tilde{\alpha})| \leq 0.2420$.