CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2018/2019 – Correzione I Prova in Itinere 02/04/2019

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

1. Applicando il teorema di Gerschgorin per colonne segue che la proprietà vale per $s = 1$. Dai risultati al punto (4) segue che la proprietà vale per ogni $s > 0$.

2. Se $\alpha \neq 0$ l'esistenza $\forall \beta$ segue dal teorema di esistenza ed unicità. Se $\alpha = 0$ la fattorizzazione non esiste (si ragiona per assurdo calcolando l'elemento di posto $(n, 1)$ di $L^{-1}A$).

3. Utilizzando la tecnica dimostrativa del teorema di esistenza ed unicità si ottiene
$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline (1/\alpha)\boldsymbol{e}^T & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \alpha I_{n-1} & \boldsymbol{\beta e}_1 \\ \hline \mathbf{0}^T & 1-\beta/\alpha \end{array}\right],$$
dove $\boldsymbol{e} = \texttt{ones}(n-1, 1)$.

4. Si ha $\det(A) = \det(U) = \alpha^{n-1}(1 - \beta/\alpha) = \alpha^{n-2}(\alpha - \beta)$. Pertanto la matrice risulta singolare se $\alpha = 0$ o $\alpha = \beta$.

5.
```
function [x] = inf_02042019_A(b, alpha, beta)
n=length(b);
x=zeros(n,1);
b(n)=b(n)-sum(b(1:n-1))/alpha;
x(n)=b(n)/(1-beta/alpha);
for k=n-1:-1:2
 x(k)=b(k)/alpha;
end
x(1)=(b(1)-beta*x(n))/alpha;
end
```

Esercizio 2

1. Risolvendo il sistema lineare si ottiene
$$x(\alpha) = \frac{\alpha}{2\alpha - 1}, \quad y(\alpha) = \frac{1-\alpha}{2\alpha - 1}.$$
Risolvendo il sistema con termine noto $[0; 1]$ si ottiene la soluzione $[y(\alpha); x(\alpha)]$ da cui per $\alpha \neq 1/2$ si ha che l'inversa della matrice dei coefficienti è
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\alpha-1} & \frac{1-\alpha}{2\alpha-1} \\ \frac{1-\alpha}{2\alpha-1} & \frac{\alpha}{2\alpha-1} \end{bmatrix}.$$
Si ottiene quindi
$$\mathcal{K}_\infty(A) = (|\alpha| + |\alpha - 1|)(\frac{|\alpha|}{|2\alpha - 1|} + \frac{|1-\alpha|}{|2\alpha - 1|}).$$
Si conclude che il sistema è mal condizionato per $\alpha \to 1/2$ e $|\alpha| \to +\infty$.

2. Si ha
$$\epsilon_{in} = \frac{-1/(2\alpha-1)^2}{\alpha/(2\alpha-1)}\alpha\epsilon_\alpha$$
da cui
$$|\epsilon_{in}| \le \frac{1}{|2\alpha-1|}u$$
e quindi il calcolo risulta mal condizionato per $\alpha \to 1/2$.

3. L'analisi del grafo associato all'algoritmo fornisce
$$\epsilon_{alg} = \epsilon_5 - \epsilon_4 + \frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha-1}(\epsilon_3 + \epsilon_2 + 2\epsilon_1)$$
da cui si ottiene
$$|\epsilon_{alg}| \le 2u + 4u\frac{(1-\alpha)^2}{|2\alpha-1|}.$$
Si conclude che l'algoritmo è instabile per $\alpha \to 1/2$ e $|\alpha| \to +\infty$.