

CALCOLO NUMERICO

Corso di Laurea in Informatica

A.A. 2018/2019 – Correzione I Prova in Itinere 02/04/2019

NOME

COGNOME

MATRICOLA

Esercizio 1

1. Applicando il teorema di Gerschgorin per righe segue che la proprietà vale per $s = 1$. Dai risultati al punto (4) segue che la proprietà vale per ogni $s > 0$.
2. Se $\beta \neq 0$ l'esistenza $\forall \alpha$ segue dal teorema di esistenza ed unicità. Se $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$ la fattorizzazione non esiste (si ragiona per assurdo calcolando l'elemento di posto $(n, 1)$ di $L^{-1}A$). Se $\beta = 0$ e $\alpha = 0$ la fattorizzazione esiste non unica (la matrice A risulta triangolare superiore).
3. Utilizzando la tecnica dimostrativa del teorema di esistenza ed unicità si ottiene per $\alpha \neq 0$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline (\alpha/\beta)\mathbf{e}_1^T & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \beta I_{n-1} & \mathbf{e} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 - \alpha/\beta \end{array} \right],$$

dove $\mathbf{e} = \text{ones}(n-1, 1)$. Per $\alpha = \beta = 0$ una fattorizzazione è $A = I_n A$.

4. Si ha $\det(A) = \det(U) = \beta^{n-1}(1 - \alpha/\beta) = \beta^{n-2}(\beta - \alpha)$. Pertanto la matrice risulta singolare se $\beta = 0$ o $\alpha = \beta$.

```
5. function [x] = inf_02042019_B(b, alpha, beta)
n=length(b);
x=zeros(n,1);
b(n)=b(n)-(alpha/beta)*b(1);
x(n)=b(n)/(1-alpha/beta);
for k=n-1:-1:1
    x(k)=(b(k)-x(n))/beta
end
end
```

Esercizio 2

1. Risolvendo il sistema lineare si ottiene

$$y(\beta) = -\frac{\beta}{1-2\beta}, \quad x(\beta) = \frac{1-\beta}{1-2\beta}.$$

Risolvendo il sistema con termine noto $[0; 1]$ si ottiene la soluzione $[y(\beta); x(\beta)]$ da cui per $\beta \neq 1/2$ si ha che l'inversa della matrice dei coefficienti è

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-\beta}{1-2\beta} & -\frac{\beta}{1-2\beta} \\ -\frac{\beta}{1-2\beta} & \frac{1-\beta}{1-2\beta} \end{bmatrix}.$$

Si ottiene quindi

$$\mathcal{K}_\infty(A) = (|\beta| + |\beta - 1|) \left(\frac{|\beta|}{|2\beta - 1|} + \frac{|1 - \beta|}{|2\beta - 1|} \right).$$

Si conclude che il sistema è mal condizionato per $\beta \rightarrow 1/2$ e $|\beta| \rightarrow +\infty$.

2. Si ha

$$\epsilon_{in} = \frac{-1/(2\beta - 1)^2}{\beta/(2\beta - 1)} \beta \epsilon_\beta$$

da cui

$$|\epsilon_{in}| \leq \frac{1}{|2\beta - 1|} u$$

e quindi il calcolo risulta mal condizionato per $\beta \rightarrow 1/2$.

3. L'analisi del grafo associato all'algoritmo fornisce

$$\epsilon_{alg} = \epsilon_5 - \epsilon_4 + \frac{(1 - \beta)^2}{2\beta - 1} (\epsilon_3 + \epsilon_2 + 2\epsilon_1)$$

da cui si ottiene

$$|\epsilon_{alg}| \leq 2u + 4u \frac{(1 - \beta)^2}{|2\beta - 1|}.$$

Si conclude che l'algoritmo è instabile per $\beta \rightarrow 1/2$ e $|\beta| \rightarrow +\infty$.