CALCOLO NUMERICO

Corso di Laurea in Informatica

A.A. 2018/2019 – Correzione Appello 05/06/2019

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

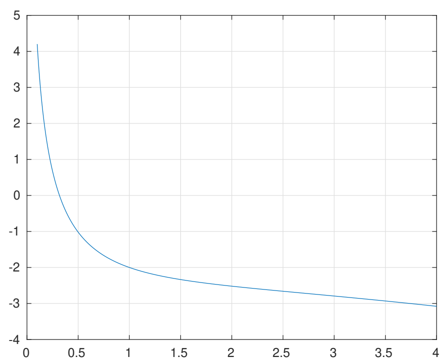
1. Si ha $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $f'(x) = \frac{2\log(x)}{x} - 1$ e $f''(x) = 2/x^2 - 2\log(x)/x^2 = (2/x^2)(1-\log(x))$ da cui $f''(x) > 0 \iff 0 < x < e$. Da $f'(e) = 2/e - 1 < 0$ si ha $f'(x) < 0$ $\forall x > 0$. Da $f(1) = -3$ segue che $\alpha \in (0,1)$. Il grafico risultante è mostrato di seguito.

2. Per il teorema di convergenza "in grande" dall'analisi del grafico segue la convergenza $\forall x_0 \colon 0 < x_0 \le \alpha$. Per punti iniziali $\alpha < x_0 < e$ si ha $x_1 \le \alpha$. Dallo studio del segno di x_1 si ricava che $x_1 > 0$ per $\log(x_0) < 1-\sqrt{3}$ da cui $x_1 > 0$ per $x_0 < b = e^{1-\sqrt{3}} \simeq 4.809217002026321e-01$.

3.
```
function [x,k] = es1_05062019(tol)
f=@(x)(log(x))^2 -x-2;
f1=@(x)(2*log(x))/x-1;
err=inf;
x0=1/3; k=0;
while (err>tol)
    x=x0-f(x0)/f1(x0);
    err=abs(x-x0);
    k=k+1;
    x0=x;
end
end
```

   Per $tol = 1.0e-12$ si ottiene $k = 6$ e $x = 2.250024034874689e-01$.

Esercizio 2



1. La condizione $1 > 1$ non è mai verificata e quindi non esistono valori di α per cui A è predominante diagonale. Il metodo di Gauss-Seidel è applicabile se $M = \texttt{tril}(A)$ è invertibile e quindi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

2. Si ha
$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix},$$
da cui
$$P = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & & \\ 0 & -\alpha & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \alpha \\ 0 & & & -\alpha \end{bmatrix}.$$
Segue che P è triangolare superiore con elementi diagonali uguali a 0 e α per cui per il raggio spettrale vale $\rho(P) = |\alpha|$ e quindi il metodo è convergente se e solo se $|\alpha| < 1$.

3.
```
function [x1] = es2_04062019(b,n,alpha,x0)
x1(1)=b(1)-alpha*x0(2);
s=0;
for k=2:n-1
    s=s+x1(k-1);
    x1(k)=b(k)-alpha*x0(k+1)+s;
end
s=s+x1(n-1);
x1(n)=b(n)+s;
end
```
Il costo computazionale è $O(n)$ operazioni aritmetiche.