CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2018/2019 – Correzione Appello 24/06/2019

NOME	COGNOME	MATRICOLA

Esercizio 1

1. Si ha $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1/2} + 1 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $\exists! \alpha \in \mathbb{R}$ con $f(\alpha) = 0$.

2. Si ha $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e $|g'(x)| = \frac{e^x}{e^x+1/2} < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Posso quindi applicare il teorema del punto fisso su un qualsiasi intervallo centrato in α da cui deduco la convergenza $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

3.
```
function [x,k] = es1_24062019(x0, tol)
g=@(x)-log(exp(x)+1/2);
err=inf;
k=0;
while (err>tol)
    x=g(x0);
    err=abs(x-x0);
    k=k+1;
    x0=x;
end
end
```

   Per $tol = 1.0e-12$ e $x0 = 1$ si ottiene $k = 59$ e $x = -2.474664615475296e-01$. Per $tol = 1.0e-12$ e $x0 = 1.0e+6$ si ottiene $k = 60$ e $x = -2.474664615469285e-01$.

Esercizio 2

1. Posto $A = A_n$ la matrice di ordine n si ha

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{e}_1^T \\ \hline \boldsymbol{0} & A_{n-1} \end{array}\right],$$

   da cui segue per induzione che il processo di eliminazione gaussiana è applicabile e

$$L = U^T = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Si ha

$$\| A \|_\infty = \| LU \|_\infty \leq \| L \|_\infty \| U \|_\infty, \quad \| A^{-1} \|_\infty = \| U^{-1} L^{-1} \|_\infty \leq \| U^{-1} \|_\infty \| L^{-1} \|_\infty,$$

da cui

$$\mathcal{K}_\infty(A) = \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty \leq \| L \|_\infty \| L^{-1} \|_\infty \| U \|_\infty \| U^{-1} \|_\infty = \mathcal{K}_\infty(L)\mathcal{K}_\infty(U).$$

Inoltre si mostra che

$$(L^{-1})_{i,j} = (-1)^{i-j} \text{ per } i \geq j.$$

Pertanto $\| L \|_\infty = 2$ e $\| L^{-1} \|_\infty = n$ da cui $\mathcal{K}_\infty(L) = 2n$ e analogamente $\mathcal{K}_\infty(U) = 2n$.

3.
```
function [x] = es2_24062019(b)
n=length(b);
x=zeros(n,1);
y=zeros(n,1);
y(1)=b(1);
for k=2:n
    y(k)=b(k)-y(k-1);
end
x(n)=y(n)
for k=n-1:-1:1
    x(k)=y(k)-x(k+1);
end
end
```

Il costo computazionale è $O(n)$ operazioni aritmetiche.