CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2018/2019 – Prova Scritta 24/06/2019

NOME	COGNOME	MATRICOLA

Esercizio 1 Si consideri l'equazione

$$f(x) = \log(e^x + 1/2) + x = 0$$

1. Si dimostri che l'equazione ha una sola soluzione reale denotata con α.
2. Si dimostri che il metodo iterativo

$$x_{k+1} = g(x_k),\ k \geq 0, \quad g(x) = -\log(e^x + 1/2)$$

genera successioni convergenti ad α per ogni scelta del punto iniziale x_0.

3. Scrivere una funzione Matlab che dati in input $tol \in \mathbb{R}$ e x_0 calcola la successione generata dal metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ a partire da x_0 arrestandosi quando $|x_k - x_{k-1}| \leq tol$ e restituendo in uscita la coppia (x_k, k). Riportare i valori ottenuti per $tol = 1.0e - 12$ e $x_0 = 1$ e $x_0 = 1.0e + 6$.

Esercizio 2 Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 3$, la matrice definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j = 1; \\ 2 \text{ se } i = j > 1 \\ 1 \text{ se } j = i + 1 \ o \ j = i - 1; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si determini la matrice $A^{(1)}$ ottenuta dopo il primo passo del metodo di eliminazione gaussiana applicato ad A. Si mostri che A ammette fattorizzazione LU e si determinino i fattori L e U con $A = L \cdot U$.
2. Sia $\mathcal{K}_\infty(A) = \parallel A \parallel_\infty \parallel A^{-1} \parallel_\infty$ il numero di condizionamento di A in norma infinito. Si mostri che $\mathcal{K}_\infty(A) \leq \mathcal{K}_\infty(L)\mathcal{K}_\infty(U)$. Si determini $\mathcal{K}_\infty(L)$ e $\mathcal{K}_\infty(U)$ e si deduca che $\mathcal{K}_\infty(A) \leq 4n^2$.
3. Si scriva un programma MatLab che dato in input $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ risolve il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ calcolando $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ e $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ e restituendo in uscita il vettore $\boldsymbol{x}$. Se ne valuti il costo computazionale.