
Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO
16/07/2019

Si ricorda che le funzioni Matlab richieste negli esercizi devono essere trascritte sui fogli consegnati poiché non sarà scaricato alcun file Matlab dai computer sui quali operate.

Esercizio 1. Si consideri l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = x - \frac{1}{2} \cos(x) - 1$.

1. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione α e se ne dia un intervallo di separazione.
2. Si mostri che il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $g(x) = \frac{1}{2} \cos(x) + 1$, $k \geq 0$, genera successioni convergenti ad α per ogni scelta del punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$.
3. Si scriva una function MatLab che dato in input $x_0 \in \mathbb{R}$ calcola la successione generata dal metodo $x_{k+1} = g(x_k)$ arrestandosi quando $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-12}$. La funzione deve restituire la coppia x_k, k . Si riportino i valori ottenuti a partire dal punto iniziale $x_0 = 0$ e $x_0 = \pi/2$.

Esercizio 2. Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 3$, la matrice definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{se } i = 1, j = n \text{ o } i = n, j = 1; \\ \alpha + 1 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } j = i + 1 \text{ o } j = i - 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per $n = 4$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \alpha + 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha + 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \alpha + 1 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini i valori del parametro α per cui A risulta predominante diagonale.
2. Si verifichi che il vettore di componenti $v_i = 1$, $i = 1, \dots, n$ è un autovettore della matrice di iterazione del metodo di Jacobi.
3. Si determini i valori del parametro α per cui il metodo di Jacobi applicato ad A risulta convergente.
4. Si scriva un programma MatLab che dato in input $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $itmax \in \mathbb{N}$ calcola la successione generata dal metodo di Jacobi con vettore iniziale nullo applicato per la risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ arrestandosi quando $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|_\infty \leq 1.0e-6$ o $k > itmax$ e restituendo in uscita la coppia \mathbf{x}_k, k . Per $\mathbf{b} = \mathbf{ones}(100, 1)$, $itmax = 100$ e $\alpha = 2$ riportare il valore di k restituito dal programma.