
Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO
10/09/2019

Si ricorda che le funzioni Matlab richieste negli esercizi devono essere trascritte sui fogli consegnati poiché non sarà scaricato alcun file Matlab dai computer sui quali operate.

Esercizio 1. Si consideri l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 1$.

1. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione α con $\alpha \in (1/2, 1)$.
2. Si mostri che il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k) = \sqrt{1 - \sqrt{x_k}}$, $k \geq 0$, è localmente convergente in α .
3. Si mostri che il metodo delle tangenti applicato all'equazione $f(x) = 0$ genera successioni convergenti ad α per ogni punto iniziale $x_0 \geq \alpha$.
4. Si scrivano due funzioni MatLab che dato in input $x_0 \in \mathbb{R}$ calcolano rispettivamente la successione generata dal metodo $x_{k+1} = g(x_k)$ e la successione generata dal metodo delle tangenti applicato a $f(x) = 0$ arrestandosi quando $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-12}$. Le funzioni devono restituire in uscita la coppia (x_k, k) . Si riportino i valori ottenuti a partire dal punto iniziale $x_0 = 0.6$.

Esercizio 2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $A_n = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j, i = 1, \dots, n; \\ \alpha^i & i = 1, \dots, n-1 \text{ e } j = n; \\ \alpha^{n-j} & j = 1, \dots, n-1 \text{ e } i = n. \end{cases}$$

1. Si dimostri che per $-1/2 \leq \alpha \leq 1/2$ la matrice A_n è predominante diagonale.
2. Si dica per quali valori di α la matrice A_n ammette fattorizzazione LU e per tali valori si determinino le matrici L e U .
3. Si scriva un programma MatLab che dati in input $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, ed il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ calcola la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ utilizzando la fattorizzazione trovata al punto precedente. Per $n \in \{16, 1024\}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{ones}(n, 1)$ e $\alpha = -1/2$ si riportino i valori di $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_\infty$.