CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2018/2019 – Correzione Appello 10/09/2019

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

1. Per separazione grafica si ha $f(x) = 0$ se e solo se $\sqrt{x} = 1 - x^2$.
2. Si ottiene $g'(x) = -\frac{1}{4\sqrt{1-\sqrt{x}}\sqrt{x}}$ da cui $|g'(\alpha)| = \frac{1}{4\alpha\sqrt{\alpha}}$. Da $\alpha > 1/2$ segue $4\alpha\sqrt{\alpha} > 1$ e quindi $|g'(\alpha)| < 1$. La convergenza locale segue dal corollario del teorema del punto fisso.
3. Si ha $f \in C^2[1/2, +\infty]$, $f'(x) = 2x + 1/(2\sqrt{x}) > 0$ per ogni $x > 0$ e $f''(x) = 2 - 1/(4x\sqrt{x}) > 0$ per ogni $x \geq 1/2$. La convergenza per ogni punto iniziale $x_0 \geq 1/2$ segue dal teorema di convergenza su intervalli.
4. ```
   function [x,k] = es1_13092019_1(x0)
   g=@(x)sqrt(1-sqrt(x));
   err=inf;
   k=0;
   while (err>=1.0e-12)
       x=g(x0);
       err=abs(x-x0);
       k=k+1;
       x0=x;
   end
   end

   function [x,k] = es1_13092019_2(x0)
   f=@(x)x^2 +sqrt(x)-1;
   f1=@(x)2*x + 1/(2*sqrt(x));
   err=inf;
   k=0;
   while (err>=1.0e-12)
       x=x0-f(x0)/f1(x0);
       err=abs(x-x0);
       k=k+1;
       x0=x;
   end
   end
   ```

   Per $x0 = 0.6$ la prima funzione restituisce $(5.248885986567915e-01, 62)$ mentre la seconda restituisce $(5.248885986564048e-01, 5)$.

Esercizio 2
   ```

1. La somma dei moduli fuori diagonale è massima sull'ultima riga. Da cui abbiamo la condizione per la predomanza digonale risulta $\sum_{j=1:n-1} |\alpha|^j < 1$. Se $|\alpha| \leq 1/2$ abbiamo che $\sum_{j=1}^{n-1} |\alpha|^j \leq \sum_{j=1}^{n-1} 2^{-j} < \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1/(1-2^{-}1) - 1 = 1$.

2. La matrice ammette sempre fattorizzazione LU in quanto le sottomatrici principali di testa fino ad ordine $n-1$ hanno determinante uguale a 1. Abbiamo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} & \cdots & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & & & \alpha \\ & \ddots & & \alpha^2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \alpha^{n-1} \\ & & & 1-(n-1)\alpha^n \end{bmatrix}.$$

3.
```
function [x, resnorm]=sys_solve2019_09_10(b, a)
n=length(b);
% risolvo Ly=b y(1:n-1)=b(1:n-1) e y(n)=b(n)-sum(a^i*y(i))
y=b;
p=a;
for i=n-1:-1:1
    y(n)=y(n)-p*y(i);
    p=p*a;
end
% risolvo il sistema Ux=y
beta=1-p*(n-1); %beta=1-a^n*(n-1)

x=zeros(n, 1);
x(n)=y(n)/beta;
p=p*x(n); % il valore di p continene a^i*x(n);
for i=n-1:-1:1
    p=p/a;
    x(i)=y(i)-p;
end

% costruizione di A_n naive
A=eye(n); p=1;
for i=1:n-1
    p=a*p;
    A(i, n)=p;
    A(n, n-i)=p; %A(n, i)=a^(n-i);
end
res=A*x-b;
 resnorm=norm(res, 'inf');
```

Per $n = 16$ si ottiene `resnorm`$= 1.1102e-16$, per $n = 1024$ `resnorm`$= 2.2204e-16$.