Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A-B

A.A. 2018-2019

C.Grisanti, L. Slavich, V.M. Tortorelli

II settimana, 23-28 settembre 2019: foglio di esercizi

LEGENDA

I principali testi e raccolte di esercizi a cui si fa riferimento in queste note sono:

[GGS]	M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"
[GGE]	M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"
[FM]	A.Faedo, L.Modica, "Analisi I, lezioni"
[MS]	P.Marcellini, C. Sbordone, "Elementi di Analisi Matematica uno"
[ABC]	E.Acerbi, G. Buttazzo, "Analisi Matetmatica ABC 1: funzioni di una variabile"

Con:

$*$ si indicano gli esercizi più impegnativi,

$\circ$ quelli di approfondimento o estensione e quelli più teorici.

Altri esercizi sono nelle raccolte di testi di esame degli anni passati reperibili in
http://pagine.dm.unipi.it/grisanti/didattica/compiti-desame/analisi-matematica/informatica/

II GRUPPO DI ESERCITAZIONE: somme in progressione geometrica, allineamenti decimali, *estremo superiore ed estremo inferiore.*

Teoria relativa nei testi indicati e svolta a lezione

CONFRONTO TRA DEFINIZIONI

estremo inferiore m di un sottoinsieme A di $\mathbf{R}$		*estremo superiore* M di un sottoinsieme A di $\mathbf{R}$
1)	per ogni a in A	
$m \le a$		$a \le M$
2)	per ogni x in $\mathbf{R}$ se per ogni a in A	
$x \le a$ allora $x \le m$		$a \le x$ allora $M \le x$
	ovvero a parole	
m è il *massimo* tra i *minoranti* di A		M è il *minimo* tra i *maggioranti* di A.

ESERCIZIO n. 1 Quali sono gli estremi superiori dei seguenti insiemi:

$\left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{\mathbf{0}\}\right\}$,

$\left\{\frac{x+1}{x-1} : x \in \mathbf{R}\ ,\quad \mathbf{x} > \mathbf{1}\right\}$, $\left\{\frac{n+1}{n-1} : n \in \mathbf{N}\ ,\quad \mathbf{n} > \mathbf{1}\right\}$,

$\left\{\frac{x-1}{x+1} : x \in \mathbf{R}\ ,\quad \mathbf{x} > \mathbf{1}\right\}$, $\left\{\frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbf{N}\ ,\quad \mathbf{n} > \mathbf{1}\right\}$,

* $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$,

* $\left\{\frac{n}{m} :\ m,\ n \in \mathbf{N}\ ,\quad \mathbf{n^2} \le \mathbf{3m^2}\right\}$.

ESERCIZIO n.2 Quali sono valori di massimo tra gli estremi superiori trovati nel precedente esercizio?

ESERCIZIO n.3 a) Quali sono gli estremi inferiori dei seguenti insiemi:

$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{\mathbf{0}\}\right\}$, $\left\{\frac{x+1}{x-1} : x \in \mathbf{R}\ ,\quad \mathbf{x} > \mathbf{1}\right\}$,

$\{x \in [2;7[:\ \sin x = 0\}$, $\left\{x \in [0;1] :\ x^2 - x + 1 \ge 0\right\}$.

b) Quali sono minimi?

∘ ESERCIZIO n. 4 a) Si provi che $\forall \varepsilon > 0\, \exists \overline{n} \in \mathbf{N}\ \forall \mathbf{n} \ge \overline{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbf{N} :\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} < \varepsilon$
(che è la definizione di $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$).
b) Osservando che se $x \ge 1$ allora $2x \ge x + 1$ si provi: $2^n \ \ge\ \ n$
[Suggerimento $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \ge \ldots$].
c) Si provi che $\forall \varepsilon > 0\, \exists \overline{n} \in \mathbf{N}\, \forall \mathbf{n} \ge \overline{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbf{N} :\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}} < \varepsilon$ (cioè $\frac{1}{2^n} \to 0$ per $n \to \infty$).
$**$ d) Analogamente: se $|a| < 1$ allora $\forall \varepsilon > 0\, \exists \overline{n} \in \mathbf{N}\, \forall \mathbf{n} \ge \overline{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbf{N} :\ |a^n| < \varepsilon$ ($a^n \to 0$ per $n \to \infty$).

ESERCIZIO n. 5 Si verifichi che $1 + a + a^2 \ldots + a^n \ = \ \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}\ ,\quad a \ne 1$

ESERCIZIO n. 6 a) Si calcoli l'estermo superiore $\sup\{1+a+\ldots+a^n : n \in \mathbf{N}\}$ fissato $a \in]0;1[$.

b)* Si calcoli l'estermo inferiore $\inf\{1-a+a^2-a^3\ldots+(-1)^n a^n : n \in \mathbf{N}\}$ fissato $a \in]0;1[$.

c) Mostrare che se $|a|<1$: $\forall \varepsilon>0\ \exists \overline{n} \in \mathbf{N}\ \forall n \geq \overline{n},\ n \in \mathbf{N}\ \left|1+a+a^2\ldots+a^n-\frac{1}{1-a}\right| \leq \varepsilon$
[Osservazione: ciò si scrive usualmente come *"somma infinita"* $1+a+a^2\ldots+a^n+\ldots=\frac{1}{1-a}$].

ESERCIZIO n. 7

a) Si provi che $0,\overline{9} = 1$.

b) Si provi che $0,\overline{001} = \dfrac{1}{99}$

c) A che frazione sarà quindi uguale $0,\overline{0\ldots01}$ con 0 ripetuto nel periodo k volte?

∘ COMPLEMENTI: 1) dalle proprietà: $0,1 \in \mathbf{N}$, $x,y \in \mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{xy} \in \mathbf{N}$, $\mathbf{N}$ è il più piccolo sottoinsieme di $\mathbf{R}$ con le precedenti proprietà, e dall'esistenza dell'estremo superiore di un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ limitato non vuoto, si ottiene la seguente intuitiva proprietà, detta di *Archimede*, del sistema dei numeri reali:

$$\text{per ogni } x \in \mathbf{R} \text{ vi è } \mathbf{n} \in \mathbf{N} \text{ per cui } \mathbf{n} \geq \mathbf{x}$$

in altre parole $\mathbf{N}$ *è illimitato superiormente in* $\mathbf{R}$.

Per dedurlo sui ragiona come segue: se $\mathbf{N}$ fosse limitato superiormente, poichè non è vuoto, $0 \in \mathbf{N}$, esisterebbe $a := \sup \mathbf{N} \in \mathbf{R}$.
In particolare $a \geq n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, quindi a sarebbe maggiore anche di tutti i numeri pari: $a \geq 2m$ per ogni $m \in \mathbf{N}$.
Quindi $\frac{a}{2} \geq m$ per ogni $m \in \mathbf{N}$.
ma ciò non è possibile poichè essendo $a = \sup \mathbf{N}$ è il più piccolo dei *"maggioranti"* di $\mathbf{N}$.

2) Quindi si deduce

$$\text{ogni sottoinsieme non vuoto di } \mathbf{N} \text{ ha un minimo elemento}$$

Infatti: se $0 \in A$ allora) è il minimo di A, altrimenti, poichè comunque $0 \leq A \neq \emptyset$, si avrebbe $0 \leq \inf A =_{\text{def}} a$. Quindi vi è $\alpha \in A$ per cui $a \leq \alpha < a+1$. Se $\alpha = a$ allora A ha minimo. Se invece $a < \alpha < a+1$ si avrebbe $0 < \alpha < a+1$. Quindi, differendo due elementi di A almeno di 1, poichè $A \subset \mathbf{N}$, α sarebbe l'unico elemento di A tra a ed $a+1$: per cui in questo caso α sarebbe il minimo di A.

Segue immediatamente il principio di induzione

$$A \subset \mathbf{N},\ \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{x} \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{1} \in \mathbf{A}) \implies \mathbf{A} = [\min \mathbf{A}; +\infty) \cap \mathbf{N}$$