Logica per la Programmazione - LPP

Leggi sul calcolo proposizionale

$A \vee \mathsf{F} \equiv A$	$A \wedge \mathsf{T} \equiv A$	(unità)
$A \vee \mathsf{T} \equiv \mathsf{T}$	$A \wedge \mathsf{F} \equiv \mathsf{F}$	(assorbimento o zero)
$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$	(idempotenza)
$A \wedge B \equiv B \wedge A$	$A \vee B \equiv B \vee A$	(commutatività)
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$	(associatività)
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	(distributività)
$\neg \mathsf{T} \equiv \mathsf{F}$	$\neg\neg A \equiv A$	(T : F / doppia negazione)
$A \vee \neg A \equiv \mathsf{T}$	$A \wedge \neg A \equiv \mathsf{F}$	(terzo escluso / contraddizione)
$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	(De Morgan)
$(A \equiv B) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftarrow B)$	$(A \equiv B) \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	(elim.-$\equiv$ / elim.-$\equiv$-bis)
$(A \Leftarrow B) \equiv (B \Rightarrow A)$	$(A \Rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$	(elim.-$\Leftarrow$ / elim.-$\Rightarrow$)
$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$	$\neg(A \equiv B) \equiv (A \equiv \neg B)$	($\neg$-$\Rightarrow$ / $\neg$-$\equiv$)
$A \vee (\neg A \wedge B) \equiv A \vee B$	$A \wedge (\neg A \vee B) \equiv A \wedge B$	(complemento)
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$	(assorbimento)
$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$	$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	(contronominale / Modus Ponens)
$A \wedge B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow A \vee B$	(semplif.-$\wedge$ / introd.-$\vee$)
$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \Rightarrow A \vee C$	(transitività-$\Rightarrow$ / risoluzione)

Semantica di formule del primo ordine per interpretazione $I = (\mathbf{D}, \alpha)$ e assegnamento $\rho : V \to \mathbf{D}$

Semantica di termini

(R0) se t è la variabile x, allora $\alpha_\rho(t) = \rho(x)$;

(R1) se t è la costante c, allora $\alpha_\rho(t) = \alpha(c)$;

(R2) se t è il termine $f(t_1, \ldots, t_n)$ allora $\alpha_\rho(t) = \alpha(f)(\alpha_\rho(t_1), \ldots, \alpha_\rho(t_n))$.

Semantica di formule

(S1) se φ è la formula atomica $p(t_1, \ldots, t_n)$ allora $I_\rho(\varphi) = \alpha(p)(\alpha_\rho(t_1), \ldots, \alpha_\rho(t_n))$

(S3) se φ è la formula $\neg P$, allora $I_\rho(\varphi) = \overline{I_\rho(P)}$, dove $\overline{\mathsf{T}} = \mathsf{F}$ e $\overline{\mathsf{F}} = \mathsf{T}$

(S4) se $\varphi = P \wedge Q$, allora $I_\rho(\varphi) = \mathsf{T}$ se $I_\rho(P) = \mathsf{T}$ e $I_\rho(Q) = \mathsf{T}$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = \mathsf{F}$

(S5) se $\varphi = P \vee Q$, allora $I_\rho(\varphi) = \mathsf{F}$ se $I_\rho(P) = \mathsf{F}$ e $I_\rho(Q) = \mathsf{F}$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = \mathsf{T}$

(S6) se $\varphi = P \Rightarrow Q$, allora $I_\rho(\varphi) = \mathsf{F}$ se $I_\rho(P) = \mathsf{T}$ e $I_\rho(Q) = \mathsf{F}$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = \mathsf{T}$

(S7) se $\varphi = P \equiv Q$, allora $I_\rho(\varphi) = \mathsf{T}$ se $I_\rho(P) = I_\rho(Q)$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = \mathsf{F}$

(S8) se $\varphi = (\forall x.P)$, allora $I_\rho(\varphi) = \mathsf{T}$ se $I_{\rho[^d/_x]}(P) = \mathsf{T}$ per qualunque $d \in \mathbf{D}$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = \mathsf{F}$

(S9) se $\varphi = (\exists x.P)$, allora $I_\rho(\varphi) = \mathsf{T}$ se c'è un elemento $d \in \mathbf{D}$ per cui $I_{\rho[^d/_x]}(P) = \mathsf{T}$; altrimenti $I_\rho(\varphi) = \mathsf{F}$

Leggi sui quantificatori

$(\forall x . P) \Rightarrow P[^{\mathbf{t}}/_x]$	$P[^{\mathbf{t}}/_x] \Rightarrow (\exists x.P)$	con **t** termine (elim-$\forall$ / intro-$\exists$)
$\neg(\exists x . A) \equiv (\forall x . \neg A)$	$\neg(\forall x . A) \equiv (\exists x . \neg A)$	(De Morgan)
$(\forall x . A \wedge B) \equiv (\forall x . A) \wedge (\forall x . B)$	$(\exists x . A \vee B) \equiv (\exists x . A) \vee (\exists x . B)$	($\forall : \wedge$ / $\exists : \vee$)
$(\forall x . A) \vee (\forall x . B) \Rightarrow (\forall x . A \vee B)$	$(\exists x . A \wedge B) \Rightarrow (\exists x . A) \wedge (\exists x . B)$	($\forall : \vee$ / $\exists : \wedge$)
	$x = y \Rightarrow P \equiv P[^y/_x]$	(Leibniz)
$(\forall x . x = y \Rightarrow P) \equiv P[^y/_x]$	$(\exists x . x = y \wedge P) \equiv P[^y/_x]$	(singoletto)
$(\forall x . A) \equiv A$ $(\exists x . A) \equiv A$	se x non è libera in A e il dominio non è vuoto	(costante)

Leggi su dominio e intervalli

$$(\forall x . A \vee B \Rightarrow P) \equiv (\forall x . A \Rightarrow P) \wedge (\forall x . B \Rightarrow P) \qquad \text{(dominio-}\forall\text{)}$$

$$(\exists x . (A \vee B) \wedge P) \equiv (\exists x . A \wedge P) \vee (\exists x . B \wedge P) \qquad \text{(dominio-}\exists\text{)}$$

$$(\forall x . x \in [a,b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x . x \in [a,b) \Rightarrow P) \wedge P[^b/_x], \text{ se } a \leq b \qquad \text{(interv-}\forall\text{)}$$

$$(\exists x . x \in [a,b] \wedge P) \equiv (\exists x . x \in [a,b) \wedge P) \vee P[^b/_x], \text{ se } a \leq b \qquad \text{(interv-}\exists\text{)}$$

$$(\Sigma x : x \in [a,b] \wedge P . E) = \begin{cases} (\Sigma x : x \in [a,b) \wedge P . E) + E[^b/_x] & \text{se } a \leq b \text{ e } P[^b/_x] \\ (\Sigma x : x \in [a,b) \wedge P . E) & \text{se } a \leq b \text{ e } \neg P[^b/_x] \end{cases} \qquad \text{(interv-}\Sigma\text{)}$$

$$\#\{x : x \in [a,b] \mid P\} = \begin{cases} \#\{x : x \in [a,b) \mid P\} + 1 & \text{se } a \leq b \text{ e } P[^b/_x] \\ \#\{x : x \in [a,b) \mid P\} & \text{se } a \leq b \text{ e } \neg P[^b/_x] \end{cases} \qquad \text{(interv-\#)}$$

$$(\mathbf{m}\, x : x \in [a,b] \wedge P . E) = \begin{cases} (\mathbf{m}\, x : x \in [a,b) \wedge P . E)\ m\ E[^b/_x] & \text{se } a \leq b \text{ e } P[^b/_x] \\ (\mathbf{m}\, x : x \in [a,b) \wedge P . E) & \text{se } a \leq b \text{ e } \neg P[^b/_x] \end{cases} \qquad \mathbf{m} \in \{\mathbf{max}, \mathbf{min}\}\ \text{(interv-}\mathbf{m}\text{)}$$

Regole di inferenza per Calcolo Proposizionale e Logica dei Predicati

$$\frac{P \equiv Q}{R \equiv R[^Q/_P]} \qquad \text{(Principio di sostituzione per } \equiv\text{)}$$

$$\frac{P \Rightarrow Q \quad P \text{ occorre positivamente in } R}{R \Rightarrow R[^Q/_P]} \qquad \text{(Principio di sostituzione per } \Rightarrow \text{(1))}$$

$$\frac{P \Rightarrow Q \quad P \text{ occorre negativamente in } R}{R \Leftarrow R[^Q/_P]} \qquad \text{(Principio di sostituzione per } \Rightarrow \text{(2))}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P[^d/_x], \text{ con } d \text{ nuova costante}}{\Gamma \vdash (\forall x.P)} \qquad \text{(Generalizzazione)}$$

$$\frac{(\exists x.P) \in \Gamma \quad \Gamma, P[^d/_x] \vdash Q, \text{ con } d \text{ nuova costante}}{\Gamma \vdash Q} \qquad \text{(Skolemizzazione)}$$

$$\frac{R \Rightarrow P[^d/_x], \text{ con } d \text{ nuova costante}}{R \Rightarrow (\forall x.P)} \qquad \text{(Generalizzazione-}\Rightarrow\text{)}$$

$$\frac{(\exists x.P) \wedge P[^d/_x] \wedge R \Rightarrow Q, \text{ con } d \text{ nuova costante}}{(\exists x.P) \wedge R \Rightarrow Q} \qquad \text{(Skolemizzazione-}\Rightarrow\text{)}$$

Triple di Hoare: Assiomi

$$\{R\}\ \mathbf{skip}\ \{R\} \qquad \text{(SKIP)} \qquad\qquad \{def(E) \wedge P[^E/_x]\}\ x := E\ \{P\} \qquad \text{(ASS)}$$

$$\{def(E_1) \wedge \ldots \wedge def(E_k) \wedge P[^{E_1,\ldots,E_k}/_{x_1,\ldots,x_k}]\}\ x_1, \ldots, x_k := E_1, \ldots, E_k\ \{P\} \qquad \text{(ASS-MULT)}$$

$$\{def(E) \wedge def(E') \wedge E \in dom(\mathbf{a}) \wedge P[^{\mathbf{b}}/_{\mathbf{a}}]\}\ \mathbf{a}[E] := E'\ \{P\}, \quad \text{dove } \mathbf{b} = \mathbf{a}[^{E'}/_E] \qquad \text{(AGG-SEL)}$$

Triple di Hoare: Regole di Inferenza

$$\frac{P \Rightarrow P' \quad \{P'\}\ C\ \{R'\} \quad R' \Rightarrow R}{\{P\}\ C\ \{R\}} \ \text{(PRE-POST)} \qquad \frac{P \Rightarrow R}{\{P\}\ \mathbf{skip}\ \{R\}} \ \text{(SKIP)}$$

$$\frac{P \Rightarrow def(E) \wedge R[^E/_x]}{\{P\}\ x := E\ \{R\}} \ \text{(ASS)} \qquad \frac{\{P\}\ C_1\ \{R\} \quad \{R\}\ C_2\ \{Q\}}{\{P\}\ C_1 ; C_2\ \{Q\}} \ \text{(SEQ)}$$

$$\frac{P \Rightarrow def(E) \quad \{P \wedge E\}\ C_1\ \{R\} \quad \{P \wedge \neg E\}\ C_2\ \{R\}}{\{P\}\ \mathbf{if}\ E\ \mathbf{then}\ C_1\ \mathbf{else}\ C_2\ \mathbf{fi}\ \{R\}} \ \text{(COND)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} P \Rightarrow Inv \wedge def(E) \quad Inv \wedge \neg E \Rightarrow R \quad Inv \Rightarrow t \geq 0 \\ \{Inv \wedge E\}\ C\ \{Inv \wedge def(E)\} \quad \{Inv \wedge E \wedge t = V\}\ C\ \{t < V\} \end{array}}{\{P\}\ \mathbf{while}\ E\ \mathbf{do}\ C\ \mathbf{endw}\ \{R\}} \ \text{(WHILE)}$$