Logica per la Programmazione

Lezione 8

- Semantica della Logica del Primo Ordine
  - Semantica dei termini
  - Semantica delle formule
  - Esempi

Interpretazione: Richiamo

Dato un alfabeto $\mathcal{V}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$, una **intepretazione** $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ è costituita da:

- Un insieme $\mathcal{D}$, detto dominio dell'intepretazione
- Una funzione di interpretazione α che associa:
  - ad ogni **costante** $c \in \mathcal{C}$ del linguaggio un **elemento** del dominio $\mathcal{D}$, rappresentato da $\alpha(c)$
  - ad ogni **simbolo di funzione** $f \in \mathcal{F}$ di arietà n una funzione $\alpha(f)$ che data una n-upla di elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un elemento di $\mathcal{D}$. Ovvero

$$\alpha(f) : \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$$

  - ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$ di arietà zero (un simbolo proposizionale) un **valore di verità** indicato da $\alpha(p)$
  - ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$ di arietà n (un **predicato** n**-ario**), una funzione $\alpha(p)$ che data una n-upla di elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un valore di verità. Ovvero

$$\alpha(p) : \mathcal{D}^n \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

Esempio di Semantica: Alfabeto e Interpretazioni

Sia dato l'alfabeto: $\mathcal{C} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ $\quad \mathcal{F} = \{\}$ $\quad \mathcal{P} = \{\mathbf{p}(\_)\}$ $\quad \mathcal{V} = \{x, y\}$

Consideriamo le seguenti interpretazioni:

- Interpretazione $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{D}_1, \alpha_1)$
  - **Dominio**: le città italiane $\qquad [\mathcal{D}_1 = \{c \mid c \text{ è una città italiana}\}]$
  - $\alpha_1(\mathbf{a}) =$ **Milano**, $\alpha_1(\mathbf{b}) =$ **Roma**, $\alpha_1(\mathbf{c}) =$ **Pontedera**
  - $\alpha_1(\mathbf{p})(x) = \mathbf{T}$ se x è capoluogo di provincia, $\mathbf{F}$ altrimenti

- Interpretazione $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{D}_2, \alpha_2)$
  - **Dominio**: l'insieme di numeri naturali $\{\mathbf{5}, \mathbf{10}, \mathbf{15}\}$ $\qquad [\mathcal{D}_2 = \{\mathbf{5}, \mathbf{10}, \mathbf{15}\}]$
  - $\alpha_2(\mathbf{a}) = \mathbf{5}$, $\alpha_2(\mathbf{b}) = \mathbf{10}$, $\alpha_2(\mathbf{c}) = \mathbf{15}$
  - $\alpha_2(\mathbf{p})(x) = \mathbf{T}$ se x è multiplo di $\mathbf{5}$, $\mathbf{F}$ altrimenti

- Interpretazione $\mathcal{I}_3 = (\mathcal{D}_3, \alpha_3)$
  - come $\mathcal{I}_2$, ma **Dominio**: l'insieme dei numeri naturali $\qquad [\mathcal{D}_3 = \mathbb{N}\}]$

Esempio di Semantica: Valore di Verità di Formule

	Dominio	$\alpha(\mathbf{a})$	$\alpha(\mathbf{b})$	$\alpha(\mathbf{c})$	$\alpha(\mathbf{p})(x) = \mathbf{T}$ sse
$\mathcal{I}_1$	città italiane	Milano	Roma	Pontedera	x capoluogo
$\mathcal{I}_2$	$\{5, 10, 15\}$	5	10	15	x multiplo di 5
$\mathcal{I}_3$	numeri naturali	5	10	15	x multiplo di 5

Formula	**Valore in $\mathcal{I}_1$**	**Valore in $\mathcal{I}_2$**	**Valore in $\mathcal{I}_3$**
$p(a)$	**T**	**T**	**T**
$p(b)$	**T**	**T**	**T**
$p(c)$	**F**	**T**	**T**
$p(a) \wedge p(c)$	**F**	**T**	**T**
$(\exists x.p(x))$	**T**	**T**	**T**
$(\forall x.p(x))$	**F**	**T**	**F**
$(\exists x.p(x)) \wedge (\exists y.\neg p(y))$	**T**	**F**	**T**

La Semantica della Logica del Primo Ordine

- Sia fissato un linguaggio $\mathcal{L}$ del primo ordine con alfabeto $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{V}, \mathcal{P})$.
- Data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e una formula ϕ su $\mathcal{L}$, vogliamo definire in modo formale la **semantica** di ϕ in $\mathcal{I}$, cioè il suo valore di verità
- Per far questo, dobbiamo prima dare la **semantica** dei termini che compaiono in ϕ
  - I termini **chiusi** denotano elementi del dominio
  - Se un termine contiene delle variabili, allora è **aperto**. La sua semantica dipende da un **assegnamento** che associa un elemento del dominio ad ogni variabile.

Quindi il significato dei simboli in $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ è determinato dall'interpretazione (dalla funzione α), mentre il significato dei simboli in $\mathcal{V}$ è determinato da un assegnamento.
Il motivo di questa differenza sarà chiarito nelle regole per la semantica.

Assegnamenti

- Un assegnamento ρ è una funzione che associa ad ogni variabile un elemento del dominio: $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$
- Possiamo rappresentare un assegnamento anche come un insieme di coppie: per esempio se $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\rho(x) = 0$, $\rho(y) = 3$, $\rho(z) = 1$, scriviamo
$$\rho = \{x \mapsto 0, y \mapsto 3, z \mapsto 1\}$$
- Se ρ è un assegnamento, con $\rho[d/x]$ denotiamo l'assegnamento che associa alla variabile x il valore d, e sulle altre variabili si comporta come ρ. Quindi
$$\rho[d/x](y) = \begin{cases} d & \text{se } x = y \\ \rho(y) & \text{altrimenti} \end{cases}$$
- Esempio: sia ρ come definito sopra, e $\rho_1 = \rho[15/z]$, allora
$$\rho_1 = \{x \mapsto 0, y \mapsto 3, z \mapsto 15\}$$

Semantica dei Termini

- Ricordiamo la definizione di termine:
  - Ogni costante in $\mathcal{C}$ è un termine e ogni variabile in $\mathcal{V}$ è un termine
  - Se f è un simbolo di funzione in $\mathcal{F}$ con arietà n e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine
- Data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \to \mathcal{D}$, la **semantica di un termine** t, in simboli $\alpha_\rho(t)$, è ottenuta per induzione strutturale con le tre regole:
  - (R0) se t è la variabile x allora $\alpha_\rho(t) = \rho(x)$
  - (R1) se t è una costante c allora $\alpha_\rho(t) = \alpha(c)$
  - (R3) se $t = \mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1$, ... , $\alpha_\rho(t_n) = d_n$, allora $\alpha_\rho(t) = (\alpha(\mathbf{f})(d_1, \ldots, d_n))$
- Quindi la semantica di un termine è un elemento del dominio. Inoltre se il termine non contiene variabili, la sua semantica non dipende dall'assegnamento (la regola (R0) non verrà mai usata).

Un esempio di Interpretazione

- Il linguaggio $\mathcal{L}$
  - $\mathcal{C} = \{\mathbf{a}\}$
  - $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}\}$ con arietà 1
  - $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}\}$ con arietà 2
- L'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$
  - $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, insieme dei numeri naturali
  - $\alpha(\mathbf{a}) = 0$
  - $\alpha(\mathbf{f})$ è la funzione successore $\alpha(\mathbf{f})(n) = n + 1$
  - $\alpha(\mathbf{p})$ è la relazione di maggiore sui naturali, per esempio $\alpha(\mathbf{p})(7, 5) = \mathbf{T}$, mentre $\alpha(\mathbf{p})(11, 18) = \mathbf{F}$
- L'assegnamento $\rho = \{x \mapsto 2, y \mapsto 3\}$
- Consideriamo i termini $\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a)))$ e $\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))$: la loro semantica sarà:
  - $\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a)))) = 3$
  - $\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))) = \rho(x) + 1 + 1 = 4$

Esempio di semantica di termini

Ricordiamo che $\alpha(\mathbf{a}) = 0$, $\alpha(\mathbf{f})(n) = n + 1$, e $\rho = \{x \mapsto 2, y \mapsto 3\}$

$$\begin{aligned}
&\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a})))) = \\
&\alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a})))) = \\
&\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))) + 1 = \\
&\alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{a}))) + 1 = \\
&\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{a})) + 1 + 1 = \\
&\alpha(\mathbf{f})(\alpha(\mathbf{a})) + 2 = \\
&\alpha(\mathbf{a}) + 1 + 2 = 0 + 3 = 3
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
&\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))) = \\
&\alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(\mathbf{f}(x))) = \\
&\alpha_\rho(\mathbf{f}(x)) + 1 = \\
&\alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(x)) + 1 = \\
&\alpha_\rho(x) + 1 + 1 = \\
&\rho(x) + 2 = 2 + 2 = 4
\end{aligned}$$

Semantica delle Formule

Data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \to \mathcal{D}$, la **semantica di una formula** ϕ, denotata $\mathcal{I}_\rho(\phi)$, è definita per induzione strutturale dalle regole che seguono.

Ricordiamo che se $p \in \mathcal{P}$, $t_1, \dots, t_n$ sono termini, allora $p(t_1, \dots, t_n)$ è una formula atomica

- (S1) se $\phi = \mathbf{p}(t_1, \dots, t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1$, ... , $\alpha_\rho(t_n) = d_n$, allora
$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = (\alpha(\mathbf{p})(d_1, \dots, d_n))$$
  - caso particolare: il predicato a zero argomenti, ovvero la proposizione:
$$\mathcal{I}_\rho(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p})$$
- (S2) - [questa regola è obsoleta]

Semantica dei Connettivi Logici (per Induzione Strutturale)

- (S3)

$$\mathcal{I}_\rho(\neg P) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (S4)

$$\mathcal{I}_\rho(P \wedge Q) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{T} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(Q) = \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (S5)

$$\mathcal{I}_\rho(P \vee Q) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{F} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(Q) = \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (S6)

$$\mathcal{I}_\rho(P \Rightarrow Q) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathbf{T} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(Q) = \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (S7)

$$\mathcal{I}_\rho(P \equiv Q) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(P) = \mathcal{I}_\rho(Q) \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Semantica dei Quantificatori

- (S8)

$$\mathcal{I}_\rho((\forall x.P)) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_{\rho[\mathbf{d}/x]}(P) = \mathbf{T} \text{ per qualunque } \mathbf{d} \text{ in } D \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (S9)

$$\mathcal{I}_\rho((\exists x.P)) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_{\rho[\mathbf{d}/x]}(P) = \mathbf{T} \text{ per almeno un } \mathbf{d} \text{ in } D \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Nota**: l'uso dell'assegnamento ρ è necessario per le regole dei quantificatori (S8) e (S9), infatti la sottoformula P è tipicamente una formula aperta.

Esercizio 1

Mostrare che la formula

$$\Phi_1 = (\exists x. Q(x) \wedge (\forall y. P(x,y)))$$

è vera nell'interpretazione $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$, dove $\mathbf{D} = \{a, b\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(P)(x,y) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ e } y = a \text{ oppure } x = a \text{ e } y = b \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\alpha(Q)(x) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ oppure } x = b \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Procedimento: Calcolare il valore di di $\mathcal{I}_{\rho_0}(\Phi_1)$ usando le regole (S1)-(S9) per induzione strutturale, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.

Esercizio 2

Calcolare il valore di verità della formula

$$\Phi_2 = (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)))$$

nell'interpretazione $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$, dove $\mathbf{D} = \{a, b, c\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(P)(x) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ oppure } x = b \\ \mathbf{F} & \text{se } x = c \end{cases}$$

$$\alpha(Q)(x) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ oppure } x = c \\ \mathbf{F} & \text{se } x = b \end{cases}$$

$$\alpha(R)(x) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = b \\ \mathbf{F} & \text{se } x = a \text{ oppure } x = c \end{cases}$$

Calcolare cioè il valore di $\mathcal{I}_{\rho_0}(\Phi_2)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.