Logica per la Programmazione

Lezione 9

- Modelli, Formule Valide, Conseguenza Logica
- Proof Systems
- Regole di inferenza per Calcolo Proposizionale con Premesse
- Teorema di Deduzione

Logica del Primo Ordine: riassunto

- **Sintassi**: grammatica libera da contesto (BNF), parametrica rispetto a un alfabeto $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{V}, \mathcal{P})$
- **Interpretazione** $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$: fissa il significato dei simboli dell'alfabeto su un opportuno dominio
- **Semantica**: data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ ed una formula ϕ, le regole (S1)-(S9) permettono di calcolare in **modo induttivo** il valore di verità di ϕ in $\mathcal{I}$ rispetto a un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \to \mathcal{D}$, ovvero $\mathcal{I}_\rho(\phi)$.

Modelli, Formule Valide, Soddisfacibili e Insoddisfacibili

- Sia $\mathcal{I}$ un'interpretazione e ϕ una formula **chiusa**. Se ϕ è **vera** in $\mathcal{I}$, diciamo che $\mathcal{I}$ è un **modello** di ϕ e scriviamo:

$$\mathcal{I} \models \phi$$

- Se Γ ("Gamma") è un insieme di formule, con

$$\mathcal{I} \models \Gamma$$

  intendiamo che $\mathcal{I}$ è un **modello** di tutte le formule in Γ

- Se una formula ϕ è vera in tutte le interpretazioni si dice che è **valida** (estensione del concetto di tautologia) e scriviamo

$$\models \phi$$

- Se una formula ϕ è vera in almeno una interpretazione si dice che è **soddisfacibile** altrimenti è **insoddisfacibile**

Esempi

- Formula **soddisfacibile**: $p(a)$
  - Basta trovare un'interpretazione che la renda vera. Per esempio: $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, con $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ e
    - $\alpha(\mathbf{a}) = 44$
    - $\alpha(\mathbf{p})(\mathbf{x}) = \mathbf{T}$ se $\mathbf{x}$ è pari, $\mathbf{F}$ altrimenti
- Formula **valida** (corrispondono alle **tautologie**):

$$(\forall x . p(x) \vee \neg p(x))$$

- Formula **insoddisfacibile** (corrispondono alle **contraddizioni**):

$$(\exists x . p(x) \wedge \neg p(x))$$

Conseguenza Logica

- Il concetto di conseguenza logica consente di parametrizzare la validità di una formula ϕ rispetto a un insieme di formule Γ
- Diciamo che ϕ è una conseguenza logica di Γ e scriviamo

$$\Gamma \models \phi$$

  se e soltanto se ϕ **è vera in tutti i modelli di** Γ.
  In altre parole, se un'interpretazione $\mathcal{I}$ rende vere tutte le formule in Γ (ovvero $\mathcal{I} \models \Gamma$), allora $\mathcal{I}$ rende vera anche ϕ (ovvero $\mathcal{I} \models \phi$)
- Caso Particolare: $\boxed{\emptyset \models \phi}$ se e solo se $\boxed{\models \phi}$, cioè se ϕ è valida

I Sistemi di Dimostrazione (Proof Systems)

- Dato un insieme di formule Δ ("Delta"), un **sistema di dimostrazione** (o **proof system**) per Δ è un insieme di **Regole di Inferenza**
- Ciascuna **Regola di Inferenza** consente di derivare una formula (**conseguenza**) da un insieme di formule dette le (**premesse**)
- Una **Regola di Inferenza** ha la forma

$$\frac{\delta_1, \ldots, \delta_k}{\delta}$$

  dove $\delta_1, \ldots, \delta_k$ sono le premesse e δ è la conseguenza, e sono tutte formule in Δ
- Se $k = 0$, la regola è chiamata anche un **assioma**.

Dimostrazioni

- Una **dimostrazione** di una formula ϕ a partire da un insieme di premesse Γ è una sequenza di formule $\phi_1, \ldots, \phi_n$ tale che
  - Ogni formula $\phi_\mathbf{i}$ è un elemento di Γ oppure è ottenuta applicando una regola di inferenza a partire dalle premesse Γ e $\phi_1, \ldots \phi_{i-1}$
  - ϕ_n coincide con ϕ
- Scriviamo

$$\Gamma \vdash \phi$$

se esiste una dimostrazione di ϕ a partire da Γ

Correttezza e Completezza dei Proof Systems

- Un proof system è **corretto** se quando **esiste una dimostrazione** di una formula ϕ da un insieme di premesse Γ allora ϕ è **una conseguenza logica** di Γ, cioè

$$\text{se } \Gamma \vdash \phi \text{ allora } \Gamma \models \phi$$

- Un proof system è **completo** se quando una formula ϕ è **una conseguenza logica** di un insieme di premesse Γ, allora **esiste una dimostrazione** di ϕ da Γ, cioè

$$\text{se } \Gamma \models \phi \text{ allora } \Gamma \vdash \phi$$

- Quindi completezza e correttezza mettono in relazione un concetto puramente sintattico ($\Gamma \vdash \phi$) con uno semantico ($\Gamma \models \phi$)
- Non ha senso considerare proof system non corretti!!

Calcolo Proposizionale come Proof System

- Il **Calcolo Proposizionale**, come lo abbiamo presentato, è un **proof system** sull'insieme delle proposizioni
- Gli assiomi sono le **leggi**
- Le regole di inferenza sono
  - il **principio di sostituzione per l'equivalenza**
  - i **principi di sostituzione per l'implicazione**
- Il Calcolo Proposizionale è corretto ed anche completo, ma non vediamo le dimostrazioni

CP come Proof System: dimostrazione del Complemento

- Quindi: una **dimostrazione** di ϕ a partire da un insieme di premesse Γ è una sequenza $\phi_1, ..., \phi_n = \phi$ dove $\phi_i \in \Gamma$ oppure è ottenuta applicando una regola di inferenza a partire da Γ e $\phi_1, \ldots \phi_{i-1}$
- Vediamo con un esempio che le nostre dimostrazioni sono solo una notazione più compatta della definizione generale
- Sia Γ l'insieme delle leggi già dimostrate e **(Sost-$\equiv$)** il *Principio di sostituzione dell'equivalenza*.

Dimostrazione di $\boxed{p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q}$ (Complemento)

	$p \vee (\neg p \wedge q)$	$\Gamma \ni \phi_1 =$	$p \vee (\neg p \wedge q) \equiv \underline{p \vee (\neg p \wedge q)}$
$\equiv$	{(Distr.)}		{Regola: (Sost-$\equiv$), applicata a ϕ_1 e (Distr.)}
	$(p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)$	$\phi_2 =$	$p \vee (\neg p \wedge q) \equiv \underline{(p \vee \neg p)} \wedge (p \vee q)$
$\equiv$	{(Terzo Escluso)}		{(Sost-$\equiv$), applicata a ϕ_2 e (Terzo Escluso)}
	$\mathbf{T} \wedge (p \vee q)$	$\phi_3 =$	$p \vee (\neg p \wedge q) \equiv \underline{\mathbf{T} \wedge (p \vee q)}$
$\equiv$	{(Unità)}		{(Sost-$\equiv$), applicata a ϕ_3 e (Unità)}
	$(p \vee q)$	$\phi_4 =$	$p \vee (\neg p \wedge q) \equiv (p \vee q)$

Cosa vedremo per la Logica del Primo Ordine

- Rivedremo le **Regole di Inferenza** del Calcolo Proposizionale in forma più generale (come proof system **con premesse**)
  - Per i connettivi logici useremo le leggi del CP
- Estenderemo il proof system alla Logica del Primo Ordine
  - Anche per il primo ordine ci limiteremo alle regole di inferenza che consentono di dimostrare la validità di formule del tipo:
    - $\phi \equiv \psi$
    - $\phi \Rightarrow \psi$
  - Introdurremo **nuove leggi** e **nuove regole di inferenza** per i quantificatori
  - Le regole di inferenza che introdurremo formano un proof system **corretto** per LPO
  - per LPO esistono diversi proof systems **corretti e completi** (come la *deduzione naturale* e il *calcolo dei sequenti*)

Leggi Generali e Ipotesi (1)

- Anche nella logica del primo ordine useremo come leggi generali **formule valide** (corrispondenti alle tautologie nel calcolo proposizionale)
- L'uso di formule valide garantisce la validità del risultato. Vediamo perché:
  - Sia Γ un insieme di **formule valide** e ϕ una formula dimostrabile a partire da Γ:

$$\Gamma \vdash \phi$$

  - se $\Gamma \vdash \phi$ allora per la correttezza di $\vdash$, $\Gamma \models \phi$, ovvero ϕ è vera in ogni modello $\mathcal{I}$ di Γ
  - poiché ogni interpretazione $\mathcal{I}$ è modello di Γ, ϕ è vera in ogni interpretazione $\mathcal{I}$
  - quindi è **valida**, ovvero

$$\models \phi$$

Leggi Generali e Ipotesi (2)

- Se in Γ, oltre alle formule valide abbiamo anche altre formule (ipotesi) allora la dimostrazione

$$\Gamma \vdash \phi$$

non garantisce la validità di ϕ, ma il fatto che ϕ sia una **conseguenza logica** delle ipotesi

- ovvero se $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove Γ_1 sono formule valide e Γ_2 sono ipotesi, allora la dimostrazione garantisce che

$$\Gamma_2 \models \phi$$

Generalizzazione del Principio di Sostituzione per $\equiv$

$$\frac{(P \equiv Q) \in \Gamma}{\Gamma \vdash \ R \equiv R[Q/P]}$$

- Nota: La generalizzazione consiste nel far riferimento in modo esplicito ad un insieme di premesse Γ
- "Se P e Q sono logicamente equivalenti nelle premesse Γ, allora il fatto che R e $R[Q/P]$ sono equivalenti è dimostrabile da Γ"

Generalizzazione dei Principi di Sostituzione per $\Rightarrow$

- Dobbiamo estendere il concetto di occorrenza positiva o negativa alle formule quantificate
  - P occorre positivamente in $(\forall x.P)$ ed in $(\exists x.P)$
- $$\frac{(P \Rightarrow Q) \in \Gamma \quad P \text{ occorre positivamente in } R}{\Gamma \vdash R \Rightarrow R[Q/P]}$$
- $$\frac{(P \Rightarrow Q) \in \Gamma \quad P \text{ occorre negativamente in } R}{\Gamma \vdash R[Q/P] \Rightarrow R}$$

Esempi

$$\begin{array}{rc} & (\forall x.P \lor R) \land (\exists x.\neg P) \\ \Rightarrow & \{\mathrm{Ip} : P \Rightarrow Q\} \\ & (\forall x.Q \lor R) \land (\exists x.\neg P) \end{array}$$

Corretto perché la prima P occorre positivamente

$$\begin{array}{rc} & (\forall x.P \lor R) \land (\exists x.\neg P) \\ \Rightarrow & \{\mathrm{Ip} : P \Rightarrow Q\} \\ & (\forall x.Q \lor R) \land (\exists x.\neg Q) \end{array}$$

Sbagliato perché la seconda P occorre negativamente

Teorema di Deduzione

- Sappiamo dal CP che per dimostrare che $P \Rightarrow Q$ è una **tautologia**, basta dimostrare Q usando P come ipotesi
- Ora che abbiamo introdotto le premesse di una dimostrazione, possiamo giustificare questa tecnica con il **Teorema di Deduzione**:

$$\Gamma \vdash P \Rightarrow Q$$

se e solo se

$$\Gamma, P \vdash Q$$

- Ovvero per dimostrare una implicazione $P \Rightarrow Q$ è possibile costruire una dimostrazione per Q usando sia le leggi generali (formule valide) che P come ipotesi