Corso di Laurea in Informatica
Correzione della prova scritta di Calcolo Numerico

Compito 06/11/2019

Esercizio 1. 1. Il determinante delle matrici principali di testa di ordine k, con $k = 1, \dots, n-1$ vale α. Per cui la fattorizzazione esiste ed è unica per ogni $\alpha \neq 0$. In questo caso i fattori L e U risultano

$$L = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ x^T & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \cdots & \cdots & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & y_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta \end{bmatrix},$$

dove $x^T = [1, \alpha - 1, \dots \alpha - 1]/\alpha$, $y^T = [1, 0 \dots, 0]$ e $\beta = \alpha - x^T y = \alpha - 1/\alpha$. Per $\alpha = 0$ la matrice non ammette fattorizzazione LU infatti se per assurdo tale fattorizzazione esistesse avremo che U, data da $U = L^{-1}A$ sarebbe tale(che $U(n, 1) \neq 0$, e quindi non risulterebbe triangolare superiore.

2. Per $\alpha \neq 0$ dalla fattorizzazione LU otteniamo direttamente che $\det(A) = \det(U) = \alpha\beta = (\alpha^2 - 1)$, da cui A risulta non singolare se $|\alpha| \neq 1$ e $\alpha \neq 0$. Per $\alpha = 0$ possiamo calcolare il detreminante con la regola di Laplace che risulta uguaie a -1. Quindi la matrice è non singolare per $|\alpha| \neq 1$

3. l metodo di Jacobi è applicabile se $\alpha \neq 0$. La matrice di Jacobi risulta

$$J = -\frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si nota che $\|J\|_1 = \frac{2}{|\alpha|}$, quindi abbiamo convergenza per $|\alpha| > 2$.

4. La funzione richiesta risulta

```
function [x, k, err]=jac2019_11_06(b, a)
n=length(b);
x0=ones(n, 1);
q=b;
q(1)=b(1)/a;
q(n)=b(n)/a;
err=1;
v1=ones(1, n); v1(1)=0;
v1=v1/a;
vn=ones(1, n); vn(n)=0;
vn=vn/a;
k=0;
while err>1.0e-13 &k<5000
    %x=J*x0+q;
    k=k+1;
    x=q;
    x(1)=q(1)-v1*x0;
    x(n)=q(n)-vn*x0;
    err=norm(x-x0, 1)
    x0=x;
end
```

i risultati ottenuti sono i seguenti

α	k	$\|x_{k+1}-x_k\|_1$
10	16	2.131628207280301e-14
2	51	9.947598300641403e-14
1+10^{-8}	100	1.979998020201008e+02

Esercizio 2. 1. La funzione è definita per $x > -2$ e $x \neq 0$. Le rette $x = -2$ e $x = 0$ risultano asintoti verticali. Lo studio della derivata prima $f'(x) = -\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2}$ mostra che questa è sempre negativa per $x > -2$. La funzione quindi è decrescente su $(-2, 0)$ e su $(0, +\infty)$. Poiche $\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ e su tale intervallo f è continua, abbiamo che esiste un punto β in cui si annulla $-2 < \beta < 1$. Similmente, f é continua su $(0, +\infty)$, decrescente e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Poiché $\lim_{x->0^+} f(x) = +\infty$ abbiamo un'unica soluzione α, con $0.5 < \alpha < 1$.

2. La derivata seconda risulta $f''(x) = \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2}{x^3}$. Per $x > 0$ abbiamo $f''(x) > 0$. Abbiamo quindi convergenza del metodo delle tangenti per ogni x_0 scelto nell'intervallo $[\alpha-\rho, \alpha]$ con $\rho < \alpha$, poiché su questo intervallo sono soddisfatte le condizioni del teorema di convergenza in largo. La convergenza è di tipo monotono decrescente. L'ordine è 2.

3. La funzione risulta

```
function [xk, k]=tang_2019_11_06(x0, tol)
f=@(x) log(1/(x+2))+1/x;
f1=@(x)-1/(x+2)-1/x^2;
err=abs(f(x0));
k=0;
while err>tol &k<=100
    xk=x0-f(x0)/f1(x0);
    err=abs(f(xk));
    k=k+1;
    x0=xk;
end
```

e i risultati ottenuti sono $k = 4$ e $x_k = 0.930177920116240$.