LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2019-2020
Prima prova di verifica - 7/11/2019

Attenzione: si scrivano **nome**, **cognome**, **matricola** e **corso IN ALTO A DESTRA** su ogni foglio che si consegna.

ESERCIZIO 1

Si dimostri che la seguente proposizione è una tautologia, senza usare tabelle di verità:

$$(C \Rightarrow A \land \neg B) \lor B \Rightarrow A \lor B \;\equiv\; (A \Rightarrow C) \land (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$$

ESERCIZIO 2

Per ognuna delle seguenti formule si dica se si tratta di una tautologia oppure no. Se è una tautologia si fornisca una dimostrazione altrimenti si fornisca un controesempio.

1. $(D \Rightarrow B) \land (\neg D \lor B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow (A \land \neg B \Rightarrow A \land \neg C)$
2. $(D \Rightarrow B) \land (\neg D \lor A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \lor \neg B \Rightarrow A \lor \neg C)$

ESERCIZIO 3

Si consideri l'alfabeto del primo ordine con $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{F, C, =\}$, dove il simbolo di predicato F è unario, mentre C e $=$ sono binari. Si consideri l'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme di tutti gli studenti di Pisa e α è definita come segue:

- $\alpha(F)(d) = \mathbf{T}$ se e solo se lo studente d frequenta LPP,
- $\alpha(C)(d, d') = \mathbf{T}$ se e solo se lo studente d conosce lo studente d'.
- $\alpha(=)(d, d') = \mathbf{T}$ se e solo se d e d' sono lo stesso studente.

Si formalizzi il seguente enunciato:

Nessuno studente conosce tutti gli studenti,
ma ogni studente che frequenta LPP conosce almeno un altro studente

ESERCIZIO 4

Si calcoli, motivando la risposta, il valore di verità della seguente formula sull'alfabeto del primo ordine con $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{f\}$ e $\mathcal{P} = \{P, Q\}$:

$$\phi = (\exists x \,.\, P(x) \Rightarrow (\forall y \,.\, Q(x, f(y))))$$

nell'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D} = \{a, b, c\}$ ed α è definita come segue

$\alpha(f)(d) = b$ for all $d \in \mathcal{D}$

$$\alpha(P)(d) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } d \in \{a, b, c\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \alpha(Q)(d, e) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } (d, e) \in \{(a, b), (b, c)\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si calcoli cioè $\mathcal{I}_\rho(\phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ è un assegnamento arbitrario.