LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2019-2020
Prima prova di verifica - 7/11/2019 - Soluzioni proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si dimostri che la seguente proposizione è una tautologia, senza usare tabelle di verità:

$$(C \Rightarrow A \wedge \neg B) \vee B \Rightarrow A \vee B \;\equiv\; (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Per dimostrare la formula, riduciamo il membri sinistro e destro dell'equivalenza alla stessa formula.

$$
\begin{array}{ll}
 & (\underline{C \Rightarrow A \wedge \neg B}) \vee B \Rightarrow A \vee B \\
\equiv & \quad \{(\text{Elim-}\Rightarrow)\} \\
 & \neg C \vee \underline{(A \wedge \neg B) \vee B} \Rightarrow A \vee B \\
\equiv & \quad \{(\text{Complemento})\} \\
 & \underline{\neg C \vee A \vee B \Rightarrow A \vee B} \\
\equiv & \quad \{(\text{Elim-}\Rightarrow)\} \\
 & \neg(\neg C \vee A \vee B) \vee A \vee B \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & \underline{(C \wedge \neg A \wedge \neg B) \vee A} \vee B \\
\equiv & \quad \{(\text{Complemento})\} \\
 & \underline{(C \wedge \neg B)} \vee A \vee \underline{B} \\
\equiv & \quad \{(\text{Complemento})\} \\
 & C \vee A \vee B
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow C} \\
\equiv & \quad \{(\text{Elim-}\Rightarrow)\} \\
 & \underline{\neg((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))} \vee C \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\underline{\neg(A \Rightarrow C)} \vee \underline{\neg(B \Rightarrow C)}) \vee C \\
\equiv & \quad \{(\neg - \Rightarrow), \text{ due volte}\} \\
 & (A \wedge \neg C) \vee \underline{(B \wedge \neg C) \vee C} \\
\equiv & \quad \{(\text{Complemento})\} \\
 & \underline{(A \wedge \neg C)} \vee B \vee \underline{C} \\
\equiv & \quad \{(\text{Complemento})\} \\
 & A \vee B \vee C
\end{array}
$$

ESERCIZIO 2

Per ognuna delle seguenti formule si dica se si tratta di una tautologia oppure no. Se è una tautologia si fornisca una dimostrazione altrimenti si fornisca un controesempio.

1. $(D \Rightarrow B) \wedge (\neg D \vee B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow (A \wedge \neg B \Rightarrow A \wedge \neg C)$
2. $(D \Rightarrow B) \wedge (\neg D \vee A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee \neg B \Rightarrow A \vee \neg C)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

1. La formula è una tautologia. Mostriamo tre dimostrazioni alternative.
   - Sviluppiamo una dimostrazione partendo da tutta la formula e riducendola a **T**:
     $(\underline{D \Rightarrow B}) \wedge (\underline{\neg D \vee B \Rightarrow \neg C}) \Rightarrow (A \wedge \neg B \Rightarrow A \wedge \neg C)$

$\equiv \quad \{(\text{Elim-}\Rightarrow), \text{ due volte}\}$

$\underline{(\neg D \vee B) \wedge (\neg(\neg D \vee B) \vee \neg C)} \Rightarrow (A \wedge \neg B \Rightarrow A \wedge \neg C)$

$\equiv \quad \{(\text{Complemento})\}$

$(\neg D \vee B) \wedge \neg C \Rightarrow (\underline{A \wedge \neg B \Rightarrow A \wedge \neg C})$

$\equiv \quad \{(\text{Elim-}\Rightarrow)\}$

$\underline{(\neg D \vee B) \wedge \neg C \Rightarrow \neg(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C)}$

$\equiv \quad \{(\text{Elim-}\Rightarrow)\}$

$\underline{\neg((\neg D \vee B) \wedge \neg C)} \vee \underline{\neg(A \wedge \neg B)} \vee (A \wedge \neg C)$

$\equiv \quad \{(\text{De Morgan})\}$

$(D \wedge \neg B) \vee C \vee \underline{\neg A} \vee B \vee \underline{(A \wedge \neg C)}$

$\equiv \quad \{(\text{Complemento})\}$

$(D \wedge \neg B) \vee \underline{C} \vee \neg A \vee B \underline{\vee \neg C}$

$\equiv \quad \{(\text{Terzo escluso})\}$

$(D \wedge \neg B) \vee \neg A \vee B \vee \mathbf{T}$

$\equiv \quad \{(\text{Zero})\}$

$\mathbf{T}$

- Sviluppiamo una dimostrazione con le *ipotesi non tautologiche*. In particolare dimostriamo la formula $A \wedge \neg B \Rightarrow A \wedge \neg C$ usando le formule $D \Rightarrow B$ e $\neg D \vee B \Rightarrow \neg C$ come *ipotesi non tautologiche*. Sviluppiamo la prova partendo dalla premessa dell'implicazione per arrivare alla conseguenza:

  $A \wedge \neg B$

  $\Rightarrow \quad \{ \textbf{Ip}: D \Rightarrow B, \text{ occ. neg. nella seguente}\}$

  $A \wedge \neg D$

  $\Rightarrow \quad \{(\text{Intro-}\vee), \text{ occ. pos.}\}$

  $A \wedge (\neg D \vee B)$

  $\Rightarrow \quad \{ \textbf{Ip}: \neg D \vee B \Rightarrow \neg C, \text{ occ. pos. } \}$

  $A \wedge \neg C$

- Sviluppiamo una dimostrazione partendo dalla premessa dell'implicazione per arrivare ad una formula equivalente alla conseguenza. Per prima cosa semplifichiamo la conseguenza.

  $\underline{A \wedge \neg B \Rightarrow A \wedge \neg C}$

  $\equiv \quad \{(\text{Elim-}\Rightarrow)\}$

  $\underline{\neg(A \wedge \neg B)} \vee (A \wedge \neg C)$

  $\equiv \quad \{(\text{De Morgan})\}$

  $\underline{\neg A} \vee B \vee \underline{(A \wedge \neg C)}$

$\equiv \quad \{(\text{Complemento})\}$

$\neg A \vee B \vee \neg C \qquad (\dagger)$

Ora mostriamo che la premessa implica la formula (†):

$(\underline{D \Rightarrow B}) \wedge (\neg D \vee B \Rightarrow \neg C)$

$\equiv \quad \{(\text{Elim-}\Rightarrow)\}$

$\underline{(\neg D \vee B) \wedge (\neg D \vee B \Rightarrow \neg C)}$

$\Rightarrow \quad \{(\text{Modus Ponens})\}$

$\neg C$

$\Rightarrow \quad \{(\text{Intro-}\vee)\}$

$\neg A \vee B \vee \neg C$

2. La formula non è una tautologia. Per mostrarlo basta trovare una interpretazione che renda falsa la formula (un *controesempio*). Per esempio: $A = \mathbf{F}$, $B = \mathbf{F}$, $C = \mathbf{T}$ and $D = \mathbf{F}$.

ESERCIZIO 3

Si consideri l'alfabeto del primo ordine con $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{F, C, =\}$, dove il simbolo di predicato F è unario, mentre C e $=$ sono binari. Si consideri l'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme di tutti gli studenti di Pisa e α è definita come segue:

- $\alpha(F)(d) = \mathbf{T}$ se e solo se lo studente d frequenta LPP,
- $\alpha(C)(d, d') = \mathbf{T}$ se e solo se lo studente d conosce lo studente d'.
- $\alpha(=)(d, d') = \mathbf{T}$ se e solo se d e d' sono lo stesso studente.

Si formalizzi il seguente enunciato:

Nessuno studente conosce tutti gli studenti,
ma ogni studente che frequenta LPP conosce almeno un altro studente

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$\neg\big(\exists x\,.\,(\forall y\,.\,C(x,y))\big) \wedge \big(\forall y\,.\,F(y) \Rightarrow (\exists z\,.\,\neg(y = z) \wedge C(y,z))\big)$$

ESERCIZIO 4

Si calcoli, motivando la risposta, il valore di verità della seguente formula sull'alfabeto del primo ordine con $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{f\}$ e $\mathcal{P} = \{P, Q\}$:

$$\phi = (\exists x\,.\,P(x) \Rightarrow (\forall y\,.\,Q(x, f(y))))$$

nell'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D} = \{a, b, c\}$ ed α è definita come segue

$\alpha(f)(d) = b$ for all $d \in \mathcal{D}$

$$\alpha(P)(d) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } d \in \{a,b,c\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \alpha(Q)(d,e) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } (d,e) \in \{(a,b),(b,c)\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si calcoli cioè $\mathcal{I}_\rho(\phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ è un assegnamento arbitrario.

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

Mostriamo che la formula ϕ è *vera* nell'interpretazione data.

La formula ϕ è una **quantificazione esistenziale**, quindi per la regola (S9) è vera se e solo se esiste un *v*alore d del dominio $\mathcal{D}$ tale per cui, assegnando ad x il valore d, la formula nella portata è vera. Formalmente abbiamo che $\mathcal{I}_\rho(\phi) = \mathbf{T}$ se, *esiste almeno un* d tale che $d \in \mathcal{D}$, $\mathcal{I}_{\rho[d/x]}(\phi_1) = \mathbf{T}$, con

$$\phi_1 = P(x) \Rightarrow (\forall y.Q(x, f(y))).$$

Scegliamo come testimone $d = a$. La formula ϕ_1 è l'implicazione di due sottoformule, quindi se la premessa e la conseguenza sono entrambe vere, per la regola (S6) è vera. Formalmente abbiamo che se $\mathcal{I}_{\rho[a/x]}(\phi_2) = \mathbf{T}$ e $\mathcal{I}_{\rho[a/x]}(\phi_3) = \mathbf{T}$, allora $\mathcal{I}_{\rho[a/x]}(\phi_1) = \mathbf{T}$ dove

$$\phi_2 = P(x) \quad \text{e} \quad \phi_3 = (\forall y.Q(x, f(y))).$$

Procediamo prima con ϕ_2. Visto che ϕ_2 è una formula atomica, per la regola (S1), si ha che $\mathcal{I}_{\rho[a/x]}(\phi_2) = \mathbf{T}$ se $\alpha(P)(\alpha_{\rho[a/x]}(x)) = \mathbf{T}$ cioè se $\alpha(P)(a) = \mathbf{T}$. Per la definizione di α, $\alpha(P)(a) = \mathbf{T}$ e quindi $\mathcal{I}_{\rho[a/x]}(\phi_2) = \mathbf{T}$.

Concentriamoci adesso su ϕ_3. La formula ϕ_3 è una **quantificazione universale**, quindi per la regola (S8) è vera se e solo se per ogni *v*alore d del dominio $\mathcal{D}$, assegnando ad y il valore d, la formula nella portata è vera. Formalmente abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[a/x]}(\phi) = \mathbf{T}$ se, *per ogni* e vale che $e \in \mathcal{D}$, $\mathcal{I}_{\rho[a/x][e/y]}(\phi_4) = \mathbf{T}$, con

$$\phi_4 = Q(x, f(y)).$$

Visto che ϕ_4 è una formula atomica, per la regola (S1), si ha che $\mathcal{I}_{\rho[a/x][e/y]}(\phi_4) = \mathbf{T}$ se

$$\alpha(Q)(\alpha_{\rho[a/x][e/y]}(x),\, \alpha_{\rho[a/x][e/y]}(f(y))) = \mathbf{T}.$$

Calcoliamo i due argomenti di $\alpha(Q)$: per la regola (R0), $\alpha_{\rho[a/x][e/y]}(x) = \rho[a/x][e/y](x) = a$; per la regola (R2) $\alpha_{\rho[a/x][e/y]}(f(y)) = \alpha(f)(\alpha_{\rho[a/x][e/y]}) = \alpha(f)(e)$. Per definizione di $\alpha(f)$, per ogni $e \in \mathcal{D}$, $\alpha(f)(e) = b$. Abbiamo quindi $\alpha(Q)(a,b)$ indipendentemente dal valore di e. Per definizione di $\alpha(Q)$, $\alpha(Q)(a,b) = \mathbf{T}$. Abbiamo quindi che $\mathcal{I}_{\rho[a/x][e/y]}(\phi_4) = \mathbf{T}$ per ogni $e \in \mathcal{D}$.

Visto che $\mathcal{I}_{\rho[a/x]}(\phi_2) = \mathcal{I}_{\rho[a/x]}(\phi_3) = \mathbf{T}$, si ha che $\mathcal{I}_{\rho[a/x]}(\phi_1) = \mathbf{T}$ e quindi anche $\mathcal{I}_\rho(\phi) = \mathbf{T}$.