# LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2019/20
# Quarta esercitazione 21 novembre 2019

**ESERCIZIO 1**
Assumendo che $P$, $Q$ e $R$ contengano la variabile libera $x$, si provi che la seguente formula è valida, utilizzando la regola della **Skolemizzazione**

$$(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \wedge (\exists x.P(x)) \ \Rightarrow \ (\exists x.\neg(Q(x) \Rightarrow R(x)))$$

**ESERCIZIO 2**
Si dimostri che le seguenti formule del primo ordine sono valide:

1. $\neg(\exists x.P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x.\neg R(x) \Rightarrow Q(x))$
2. $(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$

**ESERCIZIO 3**
Dimostrare che le seguenti formule **non sono valide**:

1. $(\forall x \,.\, P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x \,.\, Q(x)) \ \Rightarrow \ (\exists x \,.\, P(x))$
2. $(\forall x \,.\, P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x \,.\, P(x)) \ \Rightarrow \ (\exists x \,.\, Q(x))$

**ESERCIZIO 4**
Si fornisca per ognuno dei seguenti enunciati una formula del primo ordine che lo formalizza usando l'interpretazione standard sui naturali e ipotizzando che **bar** e **foo** siano due array con dominio rispettivamente $[0, n)$ e $[0, m)$:

1. L'array **bar** ha al massimo un elemento che è minore di tutti gli elementi dell'array **foo** (*suggerimento: usare i quantificatori funzionali # e **min***)
2. Il primo elemento dell'array **foo**, se esiste, è proprio uguale al doppio della somma degli elementi pari dell'array **bar**
3. La sequenza costituita dall'array **bar** seguito dall'array **foo** è strettamente crescente.

**ESERCIZIO 5**
Si consideri il seguente array **a** con dominio $[0, 4)$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 6 | 11 | 4 |

Si dimostri, utilizzando più volte la legge dell'intervallo per la sommatoria, la validità della seguente formula:

$$m = (\Sigma x \,:\, x \in [0, 4) \wedge \mathit{pari}(\mathbf{a}[x]) \,.\, (\mathbf{a}[x] - 1)^2) \qquad \equiv \qquad m = 34$$

**ESERCIZIO 6 (EXTRA)**
Dimostrare la seguente formula usando le ipotesi non tautologiche e la legge dell'intervallo per la sommatoria, assumendo che l'array **a** abbia dominio $[0, n)$ e che $x \in (0, n)$:

$$m = \big(\Sigma y : y \in [0, z) \,.\, a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0, z) \,.\, y\big) \ \Rightarrow$$
$$m + a[z] + 2 * z = \big(\Sigma y : y \in [0, z] \,.\, a[y]\big) + 2 * \big(\Sigma y : y \in [0, z] \,.\, y\big)$$