Corso di Laurea in Informatica
Correzione della prova scritta di Calcolo Numerico

Compito 16/01/2020

Esercizio 1.

1. La matrice risulta a predominanza diagonale per righe se $|\alpha| < 1$.

2. Il determinante risulta $\det(A) = n!(1 + (-1)^n \alpha^n)$ per cui la matrice è sempre non singolare se n è pari, mentre per n dispari è singolare se $\alpha = 1$.

3. Le matrici di iterazione risultano

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & \cdots & 0 & \alpha \\ -\alpha & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\alpha & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha \\ 0 & \cdots & \cdots & \vdots & \alpha^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & (-1)^i \alpha^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & (-1)^n \alpha^n \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi convergenza del metodo di Jacobi e del metodo di Gauss-Seidel per $|\alpha| < 1$. Si osserva che in questo caso le condizioni necessarie e sufficienti sono equivalenti a quelle solo sufficienti dati dalla predomaninaza diagonale.

4.
```
function [xk, k]=jacobi(a, x0, b)
tol =2^-32;
x1=stepjacobi(a, x0, b);
err=norm(x1-x0);
it=1;
x0=x1;
while err>tol & it<100
x1=stepjacobi(a, x0, b);
it=it+1;
err=norm(x1-x0);
x0=x1;
end
xk=x1;
k=it;
end


function x1=stepjacobi(a, x0, b)
n=length(b);
x1=zeros(n, 1);
x1(1)=b(1)+a*x0(n);
for i=2:n
x1(i)=(b(i)-i*a*x0(i-1))/i;
end
end
```

La funzione richiede la memorizzazione dei vettoriX_0 e X_1 ognuno di lunghezza n e ha costo lineare in n ad ogni passo.

Esercizio 2. 1. Si ha $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Poichè $e^2 > 4$ la ricerca delle soluzioni positive si può restringere all'intervallo $[0,2]$. Si ha $f'(x) = e^x - 4\cos x$ e $f''(x) = e^x + 4\sin x$. Sull'intervallo $[0,2]$ si ha $f''(x) > 0$ e quindi $f'(x)$ monotona crescente. Da $f'(0) < 0$ e $f'(2) > 0$ si ricava che esiste β in $(0,2)$ tale che $f'(x) < 0$ per $0 \le x < \beta$ e $f'(x) > 0$ per $\beta < x \le 2$. Inoltre $4\cos\frac{\pi}{4} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} > 2.8 > e$ e quindi $f(\pi/4) < 0$. Ne segue che $f(\beta) < 0$ e quindi esistono 2 soluzioni positive α e γ con $0 < \alpha < \beta < \gamma < 2$.

2. Dal teorema di convergenza in grande segue che la successione generata a partire da $x_0 = 0$ converge a α mentre la successione generata a partire da $x_0 = 2$ converge a γ.

```
function [x,it] = ing_08_01_2020(x0)
it=0;
tol=2^(-40);
f=@(x)exp(x)-4 *sin(x);
f1=@(x)exp(x)-4*cos(x);
err=inf;
while(err>tol && it<1000)
x=x0-f(x0)/f1(x0);
err=abs(x-x0);
it=it+1;
x0=x;
end
end
```

Per $x_0 = 0$ si ha $it = 5$ e $x = 3.705580959698245e-01$ mentre per $x_0 = 2$ si ottiene $it = 7$ e $x = 1.364958433733097e+00$.