Corso di Laurea in Informatica
Correzione della prova scritta di Calcolo Numerico
Compito 6/02/2020

Esercizio 1. 1. Il coefficiente di amplificazione risulta

$$c_{fx} = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{\sqrt{x}(1 + 2\sqrt{x(1-x)})}{2(2x-1)\sqrt{1-x}}$$

che non può essere limitato per $x \rightarrow 1$ e $x \rightarrow 1/2$. In un intorno di tali valori il calcolo della funzione non è quindi ben condizionato.

- La funzione è definita su $[0, 1]$ e risulta derivabile in $(0, 1)$ con $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$. La funzione risulta quindi sempre crescente e abbiamo un'unica soluzione dato che $f(0) = -1$ e $f(1) = 1$. In particolare $\alpha = 1/2$.
- Si ha $f''(x) = -1/4x^{-3/2} + 1/4(1-x)^{-3/2}$, per $x \in (0, 1)$, e $f''(x) = 0$ per $x = 1/2 = \alpha$. Poiché $f''(x)$ risulta crescente, $x = 1/2$ è l'unico punto di flesso. Possiamo allora applicare il teorema di convergenza in largo sia all'intervallo $[\alpha, \alpha + \rho]$, per ogni $\rho < 1/2$ e all'intervallo $[\alpha - \rho, \alpha]$, sempre per ogni $\rho < 1/2$.
- La funzione non risulta derivabile in $x = 0$ e in $x = 1$ pertanto non è possibile applicare il metodo delle tangenti a partire da questi punti.

```
5. function [ x, k ] = tangenti( tol, x0 )
f=@(x) sqrt(x)-sqrt(1-x);
f1=@(x) 1/(2*sqrt(x))+1/(2*sqrt(1-x));
val=f(x0);
errore=abs(val);
k=0;
while errore>tol
x1=x0-val/f1(x0);
k=k+1;
x0=x1;
val=f(x0);
errore=abs(val);
end
x=x1;
end
```

Esercizio 2. 1. (a) è vera in quanto la matrice è simmetrica. (b) è falsa. infatti si consideri il caso $n = 1$ e $\alpha = \beta = 1$.

- Se denotiamo con A_n la matrice originaria abbiamo che se $\alpha \neq 0$ possiamo eliminare β dalla prima colonna, combinando l'ultima riga con la prima moltiplicata per β/α . La matrice che si ottiene può essere scritta come

$$E_1 A_n = \begin{bmatrix} \alpha & 0_{1,2(n-1)} & \beta \\ & A_{n-1} & \\ 0 & 0_{1,2(n-1)} & \alpha - \beta^2/\alpha \end{bmatrix}$$

Quindi applicando questo schema in modo induttivo per n passi otteniamo

$$E_n E_{n-1} \cdots E_1 A_n = U = \begin{bmatrix} \alpha I_n & \beta J \\ 0 & (\alpha - \beta^2/\alpha) I_n \end{bmatrix},$$

dove J è la matrice antidiagonale di dimensione n , $J_{ij} = 1$, se $i = n - j + 1$, e $J_{ij} = 0$ altrimenti.

Per $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ questo procedimento non può essere applicato e la matrice non può essere ridotta in forma triangolare superiore senza effettuare scambi di righe.

3. Dal punto precedente abbiamo $\det(A) = \alpha^n (\alpha - \beta^2/\alpha)^n = (\alpha^2 - \beta^2)^n$.

4. Si assume che $\beta \neq 0$ altrimenti la matrice di partenza è in forma diagonale.

```
function x=solvi(alfa, beta, b)
n2=size(b,1);
n=n2/2;
x=zeros(n2, 1);
if alfa==0
    x=b(end:-1:1)/beta;
else % beta
    x(n+1:end)=b(n+1:end)/(alfa-beta^2/alfa);
    x(1:n)= (b(1:n)-beta*x(n+1:n2))/alfa
end
```