Calcolo Numerico - Corso B: Laboratorio
Lezione 1

Luca Gemignani <luca.gemignani@unipi.it>

26 Febbraio 2020

1 Matlab

L'università ha stipulato una convenzione con Mathworks per la licenza Total Academic Headcount (TAH) Student che permette agli studenti dell'Università di Pisa di installare Matlab sui propri computer personali (fino ad un massimo di 4 computer per studente). Le istruzioni per l'installazione sono disponibili sulla piattaforma di e-learning. Lo studente dovrà associare all'account Matlab un indirizzo email dell'università di Pisa, cioè del tipo "studenti.unipi.it".

Provate ad installare sulla vostra macchina personale il software, per il nostro corso basta Matlab senza ulteriori pacchetti. Chi riscontrasse problemi può contattarmi.

2 Primi calcoli in virgola mobile

Lanciamo Matlab.

```
>> realmin
ans = 2.2251e-308
>> realmax
ans = 1.7977e+308
>> eps
ans = 2.2204e-16
```

Si provino a confrontare questi valori con quelli teorici di $\omega = 2^{-m-1}$ e $\Omega = 2^M(1-2^{-t})$ ... attenzione, occorre porre un po' di attenzione per calcolare Ω, ricordando che per lo standard IEEE, $m = 1021, M = 1024, t = 53$.

Esercizio 1. `realmin` è davvero il più piccolo numero rappresentabile? verificare che esistono i numeri "denormalizzati" che si trovano tra 0 e `realmin`.

Perdita di precisione da alcuni calcoli.

Esercizio 2. Consideriamo il calcolo della funzione

$$f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

In macchina calcoliamo

$$g_1(\tilde{x}) = (\tilde{x} \otimes \tilde{x}) \ominus 1; \quad g_2(\tilde{x}) = (\tilde{x} \ominus 1) \otimes (\tilde{\oplus} 1).$$

Valutiamo gli errori

$$\epsilon_{TOT_1} = \frac{g_1(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}; \quad \epsilon_{TOT_2} = \frac{g_2(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}.$$

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &g_1(\tilde{x}) = ((x(1+\epsilon_x) \cdot x(1+\epsilon_x))(1+\epsilon_1) - 1)(1+\epsilon_2) \doteq \\ &\doteq x^2(1 + 2\epsilon_x + \epsilon_1 + \epsilon_2) - 1(1+\epsilon 2) = \\ &(x^2-1) + (x^2-1)\epsilon_2 + x^2(2\epsilon_x + \epsilon_1) \end{aligned}$$

da cui

$$\epsilon_{TOT_1} = \frac{g_1(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{2x^2}{x^2-1}\epsilon_x + \frac{x^2}{x^2-1}\epsilon_1 + \epsilon_2.$$

Analogamente

$$\begin{aligned} &g_2(\tilde{x}) = (x(1+\epsilon_x) - 1)(x(1+\epsilon_x) + 1)(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3) \doteq \\ &\doteq (x^2(1+2\epsilon_x) - 1)(1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) = \\ &= (x^2-1)(1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + 2x^2\epsilon_x \end{aligned}$$

da cui

$$\epsilon_{TOT_2} = \frac{g_2(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{2x^2}{x^2-1}\epsilon_x + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.$$

Cosa osserviamo?

1. La componente dell'errore dovuta alla perturbazione dei dati iniziali rimane invariata.
2. La componente dell'errore dovuta agli errori locali delle operazioni dipende dall'algoritmo utilizzato.
3. IL secondo algoritmo è generalmente preferibile.

Esercizio 3. Dato $x = 1 + 2^{-50}$ dire se x è numero di macchina. Valutare quindi $f(x)$ con l'algoritmo 1 e 2. Calcolare quindi $f(x) = 2^{-100} + 2^{-49}$. Quale errore si commette in questo calcolo? Valutare quindi gli errori totali commessi dall'algoritmo 1 e 2. Quale e' il più preciso?

Esercizio 4. Ripetere l'analisi per la funzione $f(x) = x^2 + 1$.

Esercizio 5. Supponimo di voler calcolare il limite della funzione $f(x) = x(\sqrt{x^2+1} - x)$ per $x \to \infty$ –dopo aver dimostrato che $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1/2$–.

- Si generi un vettore di 100 punti nell'intervallo $[5 * 10^7, 10^8]$, con il comando `x=linspace(5*10^7, 10^8)`.
- Si definisca la funzione con il comando `f=@(x) x.*(sqrt(x.^2+1)-x)`, dove gli operatori preceduti dal . permettono di valutare in parallelo la funzione su tutte le componenti di un vettore, cioè $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = [f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)]$.
- Si valuti f sui 100 punti del vettore `x`, con il compando $y = f(x)$.
- Si plottino questi valori con il comando `plot(x, y)`. Il grafico dovrebbe in teoria mostrare la convergenza della funzione a $1/2$. Cosa succede invece?

Si ripeta lo stesso ragionamento riscrivendo $f(x)$ come $f_1(x) = x/(\sqrt{x^2+1} + x)$.