Esercitazioni 25/03

$A = I + \alpha e e^T \qquad e = [1 \cdots 1]^T$

① Per quali valori di α A è invertibile?

② Mostrare che inverso è $B = I + \beta e e^T \quad \beta$?

③ Analisi del condizionamento di A

① $\underline{\underline{Ax=0}} \iff \begin{cases} x_1 + \alpha \sum_i x_i = 0 \\ x_2 + \alpha \sum_i x_i = 0 \\ \vdots \\ x_n + \alpha \sum_i x_i = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$

$$x + \alpha \sum_{i=1}^{n} x = x + n\alpha x = x(1 + n\alpha)$$

Se $1 + n\alpha \neq 0 \quad x = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

Se $1 + n\alpha = 0 \iff \alpha = -\frac{1}{n}$ i vettori del tipo $\begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix}$ $= x\,e$ stanno nel nucleo

$\Rightarrow A$ singolare.

②

$$I = (I + \alpha e e^T)(I + \beta e e^T) \iff$$

$$I = I + \beta e e^T + \alpha e e^T + \alpha e e^T \beta e e^T$$

$$\iff$$

$$\cancel{I} = \cancel{I} + \beta e e^T + \alpha e e^T + \alpha\beta\, e (e^T e) e^T$$

$$\iff$$

$$0 = (\beta + \alpha + \alpha\beta n)\, e e^T \qquad e e^T \neq 0$$

$$\iff \alpha + \beta + \alpha\beta n = 0$$

$$\iff \beta = \frac{-\alpha}{1+\alpha n} \qquad \left(\alpha \neq -\frac{1}{n}\right)$$

③ $$A = \begin{bmatrix} \alpha+1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha \cdots & \alpha \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \qquad \|A\|_\infty = |\alpha+1| + (n-1)|\alpha|$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \beta+1 & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \beta+1 & \beta & \cdots \end{bmatrix} \qquad \|A^{-1}\|_\infty = |\beta+1| + (n-1)|\beta|$$

$$K_\infty(A) = \left(|\alpha+1| + (n-1)|\alpha|\right)\left(|\beta+1| + (n-1)|\beta|\right)$$

Mal condizionamento $|\alpha| \to +\infty$

$$|\alpha+1| + (n-1)|\alpha| \to +\infty \qquad K_\infty(A) \to +\infty$$

$$|\beta+1| + (n-1)|\beta| \to 1 - \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 2\frac{(n-1)}{n}$$

Si ragiona simmetrico. $\alpha \to -\frac{1}{n}$ $\qquad K_\infty(A) \to +\infty$

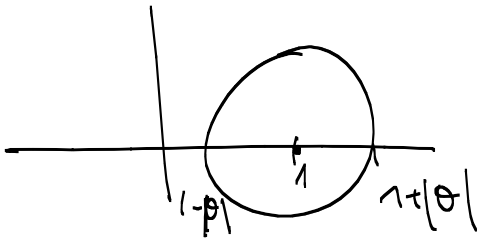
Esercizio 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I + \theta e_1 e_n^T + \theta e_n e_1^T$$

- Se $|\theta| < 1 \Rightarrow A$ invertibile
- Per quali valori di θ A è invertibile
- Condizionamento? ($\|\ \|_\infty$)

① Cerchi di Gerschgorin:

Centro 1 e raggio $|\theta|$



$0 \notin \bigcup K_i \Rightarrow 0$ non è autovalore di A

$\Rightarrow A$ è invertibile.

② Per quali valori è singolare.

$$A x = 0 \iff \begin{cases} x_1 + \theta x_n = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} = 0 \\ \theta x_1 + x_n = 0 \end{cases} \iff x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 0$$

e

$$\begin{cases} x_1 + \theta x_n = 0 \\ \theta x_1 + x_n = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\exists$ soluzioni non nulle $\iff \underline{1 - \theta^2} = 0 \iff \theta = \pm 1$

Invertibile per $\theta \neq \pm 1$

Calcoliamo inversa

$i = 2 \cdots n-1$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \theta \\ & \ddots & \\ \theta & & 1 \end{bmatrix} x = e_i \iff x = e_i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix} x = e_1 \iff \begin{cases} x_1 + \theta x_n = 1 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} = 0 \\ \theta x_1 + x_n = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + \theta x_n = 1 \\ \theta x_1 + x_n = 0 \end{cases} \iff x_1 (1 - \theta^2) = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{1-\theta^2}$$

$$x_n = -\frac{\theta}{1-\theta^2}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\theta^2} & & -\frac{\theta}{1-\theta^2} \\ & 1 & \vdots \\ -\frac{\theta}{1-\theta^2} & & \frac{1}{1-\theta^2} \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 1 + |\theta| \qquad \|A^{-1}\|_\infty = \max\left\{1, \frac{1}{|1-\theta^2|} + \frac{|\theta|}{|1-\theta^2|}\right\}$$

$$|\theta| \to +\infty \qquad \kappa_\infty(A) \to +\infty$$

$|\theta| \to 1 \quad \|A\|_\infty \to 2 \quad \|A^{-1}\|_\infty \to +\infty \quad K_\infty(A) \to +\infty$

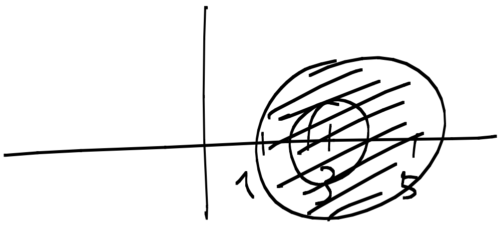
Esercizio 3

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

→ verifica che A è invertibile

→ maggiorare condizionamento in $\|\cdot\|_2$

(1) Cerchi di Gershgorin.



A simmetrica ⇒ λ reali.

Teor. di Gershgorin. $\underline{1 \le \lambda \le 5}$ ⇒

0 non è autovalore di A ⇒ A è invertibile.

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\rho(A^2)}$$

gli autoval. di A^2 sono i quadrati degli autoval. di A

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x$$

Siano $1 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n \le 5$ gli autovalori di A

$$\rho(A^2) = \lambda_n^2 \qquad \|A\|_2 = \lambda_n \le 5$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(A^{T}A^{-1})} = \sqrt{\rho(A^{-2})}$$

gli autovalori di A^{-1} sono i reciproci degli autovalori di A

$$Ax = \lambda x \iff \frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$$

$\frac{1}{\lambda_n} \le \dots \le \frac{1}{\lambda_1}$ gli autovalori di A^{-1}

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2}} = \frac{1}{\lambda_1}$$

$$K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \le \frac{5}{1} = 5$$

A è ben condizionata