Esercitazione 01/06

$A = (a_{ij}) \qquad a_{ij} = \min(i,j)$

1. Dire se A ammette fattorizzazione LU
2. In caso affermativo determinare la fattorizzazione.
3. Dire se la fattorizzazione è unica.
4. Mostrare che A è invertibile
5. Scrivere un programma Matlab per la risoluzione di $Ax=b$ con costo lineare.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & -\gamma_{n-1} \\ \gamma_0 & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

1. Mostrare che A è invertibile per $|\gamma_i| < 1$ $i=1 \dots n$.
2. Determinare per quali valori di γ_i A ammette fattorizzazione LU
3. Per tali valori determinare la fattorizzazione LU.
4. Determinare per quali valori di γ_i la matrice A è invertibile.

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad a_{ij} = \min(i;j)$

$n=4$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$n=2$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$n=3$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dimostro che $\quad A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{U}$

$B = LU = (b_{ij})$

$$b_{ij} = (i\text{-esima riga di } L) \times (j\text{-esima colonna di } U)$$

i-esima posizione

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j\text{-esima posizione}$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\min(i,j)} = \min(i,j)$$

$$B = A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Unicità?</u>

$$\det A = \det(L \cdot U) = \det L \cdot \det U$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A_k & \\ \hline & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L_k & \\ \hline & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U_k & \\ \hline & \end{array}\right)$$

$$\underline{A_k = L_k \cdot U_k}$$

fattorizzazione LU di A
$\Rightarrow$ fattorizzazione LU di tutte le sottomatrici principali di testa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2) $\det A_k = \det(L_k \cdot U_k) =$

$$= \underbrace{\det L_k}_{} \cdot \underline{\det U_k}$$

$$= \quad 1 \quad \neq$$

$\Rightarrow$ Teorema di esistenza ed unicità $\exists!$ fattorizzazione LU

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

$$\Rightarrow$$
$$\Leftarrow$$

$$Ax = b \qquad A = LU$$

$$L\underbrace{Ux}_{y} = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

sostituzioni in avanti (triangolare inferiore)

```
y(1) = b(1); s = 0;
for k = 2:n
    s = s + y(k-1)
    y(k) = b(k) - s;
end;
```

2n operazioni

O(n) operazioni

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -\gamma_{n-1} \\ \gamma_0 & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

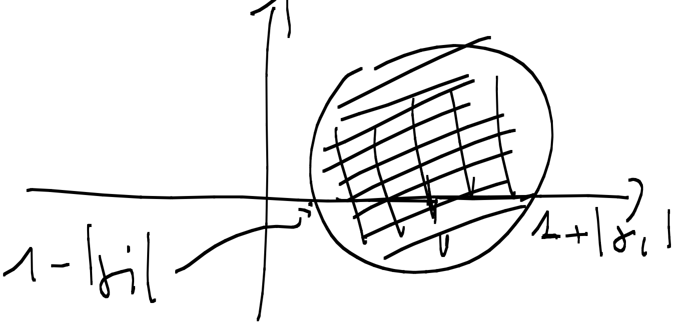
Se $|\gamma_i| < 1 \Rightarrow A$ è invertibile

Teorema di Gerschgorin.

$$K_i = \{ z \in \mathbb{C} : |z-1| \le |\gamma_i| \}$$

$i = 1 \dots n-1$

$$K_n = \{ z \in \mathbb{C} : |z-1| \le |\gamma_0| \}$$



$1-|\gamma_1|>0 \iff 1>|\gamma_1|$

$\iff |\gamma_1|<1$

Se $|\gamma_1|<1 \Rightarrow 1-|\gamma_1|>0 \Rightarrow$

$0 \notin K_i \Rightarrow 0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i$

$\Rightarrow A$ è invertibile.

Fattorizzazione LU

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\gamma_{k-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Triangolare superiore con elementi diagonali $\neq 0$

$\Rightarrow A_k$ invertibile, $k=1,\dots,n-1$

$\Rightarrow \exists!\ LU$ di A

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\gamma_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & & -\gamma_{n-1} \\ \hline \gamma_0 & & & & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline x_1 \cdots x_{n-1} & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & -\gamma_{n-2} & 0 \\ & & 1 & -\gamma_{n-1} \\ \hline & 0^T & & \beta \end{array}\right)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -\gamma_{n-2} \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \gamma_0$$

$$-x_1\gamma_1 + x_2 = 0 \iff x_2 = \gamma_0\gamma_1$$

$$-x_2\gamma_2 + x_3 = 0 \qquad x_3 = x_2\gamma_2 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2$$

$$\ldots\; x_{n-1} = \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_{n-2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\gamma_{n-1} \end{bmatrix} + \beta = 1$$

$$\beta = 1 + x_{n-1}\gamma_{n-1} = 1 + \gamma_0 \cdots \gamma_{n-2}\gamma_{n-1}$$

$$\boxed{\beta = 1 + \prod_{i=0}^{n-1} \gamma_i}$$

Determinare per quali valori di γ_i A è invertibile

$$A \text{ è invertibile} \iff \det U \neq 0$$

$$\iff \det U = \beta \neq 0$$

$$\iff \prod_{i=0}^{n-1} \gamma_i \neq -1$$

Se $|\gamma_i| < 1$ $\quad \left|\prod_{i=0}^{n-1} \gamma_i\right| = \prod_{i=0}^{n-1} |\gamma_i| < 1$