# Lezione 17.04

- Eliminazione Gaussiana con pivoting
- Pivoting migliore stabilità ma peggiore fill-in.
- Soluzione per matrici sparse: metodi iterativi

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile.

$$A = A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & & \\ a_{n1}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$\exists\, a_{j1}^{(0)} \neq 0$ Prendo $j : |a_{j1}^{(0)}| = \max_{k=1..n} |a_{k1}^{(0)}|$

Scambio riga $j$ con riga $1$

$$A^{(0)} \longrightarrow A^{(\frac{1}{2})} = \left( \begin{bmatrix} a_{j1}^{(0)} & \dots & a_{jn}^{(0)} \\ & & \\ a_{11}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ & & \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 \cdots 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \cdots 1 \end{bmatrix}$$ posizione $j$

$$A^{(1/2)} = P_1 A^{(0)}$$

$P_1$ matrice ottenuta dall'identità scambiando colonna 1 e $j$

$P_1$ matrice di permutazione (proprietà: $P^{-1} = P^T$)

$$A^{(1/2)} = P_1 A^{(0)} \longrightarrow A^{(1)} = E_1 P_1 A^{(0)}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \text{---} \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \text{---} \end{bmatrix}$$

$\exists\, j \geq 2$ t.c. $a_{j2}^{(1)} \neq 0$

(altrimenti 1 e 2 sono linearmente dipendenti $\Rightarrow$ $A$ singolare)

Prendiamo $\left|a^{(1)}_{j2}\right| = \max_{k=2..n} \left|a^{(1)}_{k2}\right|$

Scambio 2 e $j$-esima riga ....

Il processo diviene:

$$E_{n-1} P_{n-1} E_{n-2} \cdots E_1 P_1 A^{(0)} = U$$

$$A^{(0)} = \underbrace{P_1^T E_1^{-1} \cdots P_{n-1}^T E_{n-1}^{-1}}_{L} U$$

$$A^{(0)} = L \cdot U$$

## L non è triangolare

("psicologicamente triangolare" MATLAB)

$[L, U] = lu(A)$ / $x = A \backslash b$

**pivoting** (partial pivoting)

1. rende il processo applicabile ad ogni matrice invertibile
2. migliora la stabilità
3. non cambia il costo computazionale
4. può aumentare il fill-in.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & x_{n-1} \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

L, U sparse.

no con pivoting

U si riempie.

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & 1-\epsilon \\ 1+\epsilon & -\epsilon \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = A \backslash b$ Ok

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1+\epsilon)}{\epsilon} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = E \cdot A \qquad x_2 = U \backslash b$$

$$b = E \cdot b$$

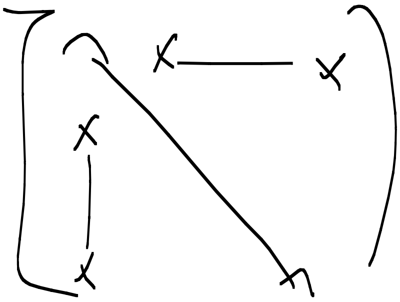
NO

---

## Metodi Iterativi

$Ax = b$ A invertibile A sparsa

A sparsa = molti elementi sono nulli

$A =$ 

$nnz(A) \ll n^2$

$nnz(A) = O(n)$

$O(n \log^p n)$

$O(n \cdot \sqrt{n})$

Metodo di eliminazione gaussiana = metodo diretto
= numero finito di passi otteniamo la soluzione del sistema.

Metodi iterativi: costruiamo una successione
$\{x^{(k)}\}$ di vettori tali che $x^{(k)} \longrightarrow x$
soluzione del sistema lineare.

Criterio di arresto: quando mi arresto?

$$\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \qquad x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$$

Def: $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ $\quad \lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x$

$$\iff \lim_{k \to +\infty} \| x^{(k)} - x \| = 0$$

Qualsiasi norma ok

$$\|x^{(k)} - x\|_\infty = \max_{j=1\cdots n} |x_j^{(k)} - x_j| \xrightarrow{k\to+\infty} 0$$

$$|x_j^{(k)} - x_j| \xrightarrow{k\to+\infty} 0 \qquad j=1\cdots n$$

$$Ax = b \qquad A = M - N$$

$M$ invertible.

$$Ax = b \iff (M-N)x = b$$

$$\iff Mx = Nx + b$$

$$\iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

$$\iff x = Px + q$$

$$P = M^{-1} N \qquad \underline{q} = M^{-1} b$$

$$\boxed{A x = b} \iff \boxed{\begin{array}{c} x = P x + \underline{q} \\ P = M^{-1} N \quad q = M^{-1} b \\ A = M - N \end{array}}$$

$$x = P x + \underline{q} \rightsquigarrow \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = P x^{(k)} + \underline{q} \end{cases}$$

Teorema: se $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x \in \mathbb{R}^n$

allora $x = P x + \underline{q}$

(questa è la soluzione del sistema lineare)

Dim: $x^{(k)} \longrightarrow x$ (Ipotesi)

$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + g$ (Ipotesi)

$$x = \lim_{k \to +\infty} x^{(k+1)} = \lim_{k \to +\infty} P x^{(k)} + g$$
$$= Px + g$$

---

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$Ax = b$ $\quad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1. $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad N = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$A = M - N$ $\quad M$ invertibile

$$P = M^{-1} N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = P x^{(k)} + \cancel{q}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

Successione generata $\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ?

dipende dalla scelta del vettore iniziale

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall k$$

Ok convergenza.

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} = (-1)^{(k)} \begin{bmatrix} 2^k \\ 2^k \end{bmatrix}$$

$x^{(k)}$ diverge (non converge)

---

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = M^{-1}N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = P\, x^{(k)}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$x^{(k)} \to 0$ soluzione.

Convergenza in generale dipende da come sono selezionate $M$ e $N$
$(A = M - N)$

e dalla selezione del vettore iniziale