CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2019/2020 – Correzione Appello 09/07/2020

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

1. Dal teorema di Gerschgorin si ha che $1/3 \le \lambda \le 1$. Segue $\mathcal{K}_2(A) = \lambda_{max}/\lambda_{min} \le 3$.
2. L'esistenza della fattorizzazione LU segue dalla predominanza diagonale. La matrice $A^{(1)}$ differisce da A nella seconda riga che risulta $[0, 5/8, -1/6, 0, \ldots, 0]$. In particolare $A^{(1)}[2 : n, 2 : n]$ è tridiagonale.
3. Segue che il metodo di eliminazione gaussiana per il calcolo della fattorizzazione LU di A richiede $O(n)$ operazioni aritmetiche.

Esercizio 2

1. Si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$. Inoltre $f'(x) = (-1/x^2)e^{1/x} - 1 < 0\ \forall x \neq 0$, e $f''(x) = (-1/x^2)^2e^{1/x} + (2/x^3)e^{1/x} \ge 0\ \forall x \ge -1/2,\ x \neq 0$. Dal grafico segue che $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione reale positiva α con $\alpha \in [1, 2]$.
2. Si ha $|g'(x)| = (1/x^2)e^{1/x}$ da cui $|g'(\alpha)| = 1/\alpha$. Quindi si ha $|g'(\alpha)| < 1$ e la convergenza locale segue dal corollario del teorema del punto fisso.
3. La convergenza della successione ad α segue dal teorema di convergenza in grande per il metodo delle tangenti.