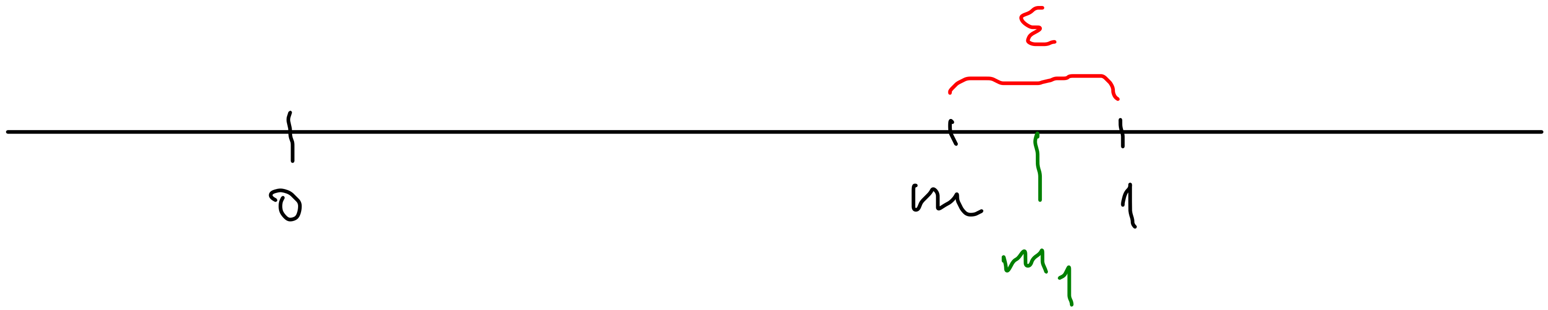
Def: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $m \in \mathbb{R}$ si dice massimo di A se $m \geq a$ $\forall a \in A$ e $\underline{m \in A}$.

Es: $A = [0,1] \Rightarrow \max(A) = 1$.

Es: $B = [0,1)$ allora B non ha massimo.

Verifichiamolo. Supponiamo per assurdo che $m \in \mathbb{R}$ sia il max di B.

$\Rightarrow m \in B$ allora $m < 1$ perché $B = [0,1)$



poniamo $\varepsilon = 1 - m > 0$ e definiamo

$m_1 = m + \frac{\varepsilon}{2}$. Risulta che $m_1 \in B$ ma

$m < m_1$ che contrasta con il fatto che

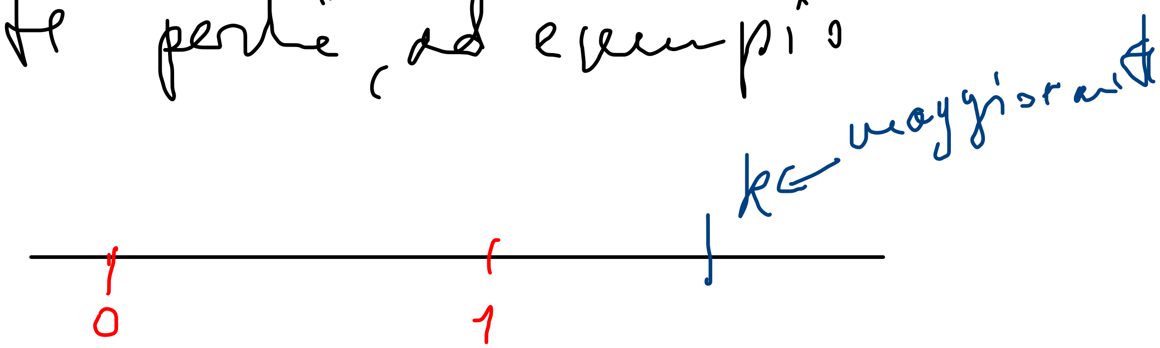
m è il massimo di B quindi dovrebbe

essere $m \geq b \quad \forall\, b \in B$.

Def: Dato $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ un numero $k \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di A se $k \geq a$ $\forall a \in A$. L'insieme di tutti i maggioranti di A si indica con $\mathcal{M}_A$.

Es: $A = [0,1]$ allora 3 è un maggiorante di A. $3 \in \mathcal{M}_A$.

$\frac{1}{4}$ non è un maggiorante perché, ad esempio $1 \in A$ e $1 > \frac{1}{4}$



Oss: Se esiste un maggiorante di A allora ne esistono infiniti.

Infatti se $k \in \mathcal{M}_A \Rightarrow m$ è un maggiorante di A $\forall\, m \geq k$.

Es: $A = \mathbb{R}$ non ha maggioranti

Es: $A = [4, +\infty)$ non ha maggioranti

Def: Se $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$ allora l'insieme A si dica **limitato superiormente**.

Definizioni analoghe per minimo, minorante e insieme inferiormente limitato.

Es: m è un minorante per A se

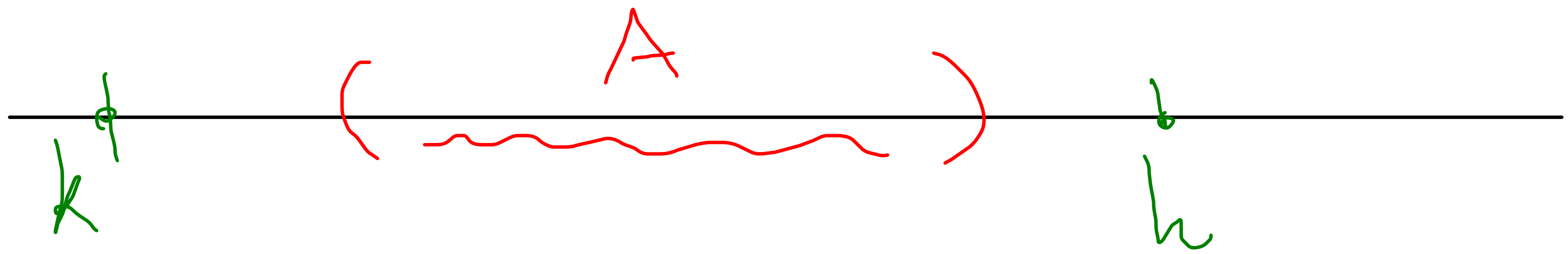
$m \leq a \quad \forall a \in A$.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ se A è sia superiormente che inferiormente limitato allora A si dice

limitato.

Oss: A è limitato se e solo se $\exists\, h, k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$k \le a \le h \quad \forall\, a \in A$$



Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, superiormente limitato, allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti. Tale minimo si dice estremo superiore di A e si indica con $\sup(A)$.

Es: $A = [0,1) \Rightarrow \mathcal{M}_A = [1,+\infty)$

$\min(\mathcal{M}_A) = 1 \Rightarrow \sup(A) = 1.$

Es: $B = [0,1] \Rightarrow \Gamma_B = [1, +\infty)$

$\Rightarrow \min(\Gamma_B) = 1 \Rightarrow \sup(B) = 1.$

Oss: Se esiste $\max(A)$ allora

$\max(A) = \sup(A).$

Notazione: Se A non è superiormente limitato scriviamo $\sup(A) = +\infty.$

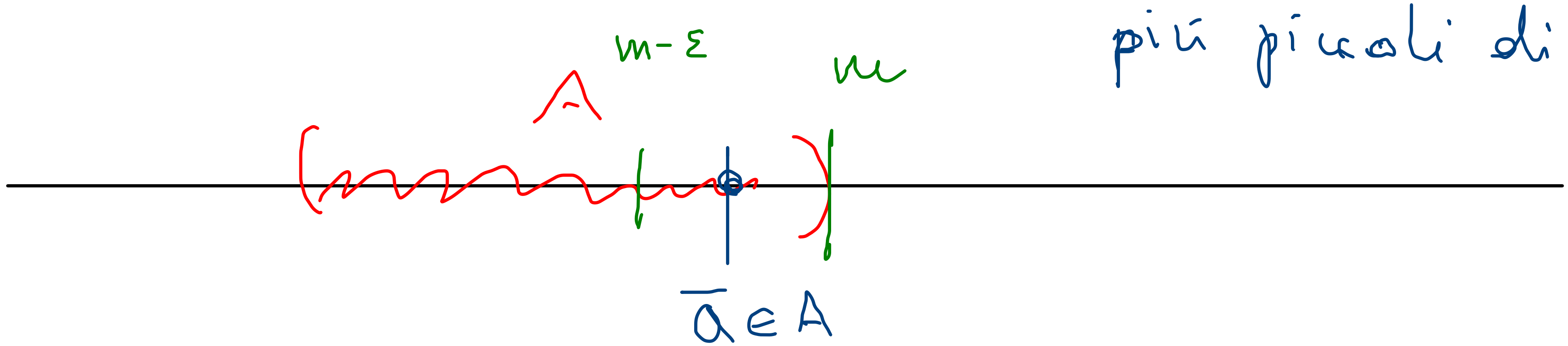
Oss: $A \neq \emptyset$ superiormente limitato.

Allora $m = \sup(A)$ se e solo se valgono

1) $a \leq m \quad \forall a \in A$ ⟵ m è un maggiorante

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A$ t.c. $\bar{a} > m - \varepsilon$.

non ci sono maggioranti più piccoli di m.



Oss: La scrittura

$$\boxed{\sup(A) < +\infty}$$

vuol dire che l'estremo superiore di A è un numero reale quindi A è superiormente limitato.

Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

in modo che valga

$$-\infty \leq x \leq +\infty \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Oss: Se $x \in \mathbb{R}$ (quindi $x \neq +\infty$, $x \neq -\infty$) allora

$$-\infty < x < +\infty.$$

Operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$.

1) Se $x \neq +\infty$ allora $x + (-\infty) = -\infty$

2) Se $x \neq -\infty$ allora $x + (+\infty) = +\infty$

3) Se $x > 0$ allora $x \cdot (+\infty) = +\infty$ e $x \cdot (-\infty) = -\infty$

4) Se $x < 0$ allora $x \cdot (+\infty) = -\infty$ e $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

Operazioni vietate

$(+\infty) + (-\infty)$ e viceversa

$0 \cdot (+\infty)$

$0 \cdot (-\infty)$

Operazioni valide

$(+\infty)(+\infty) = +\infty$

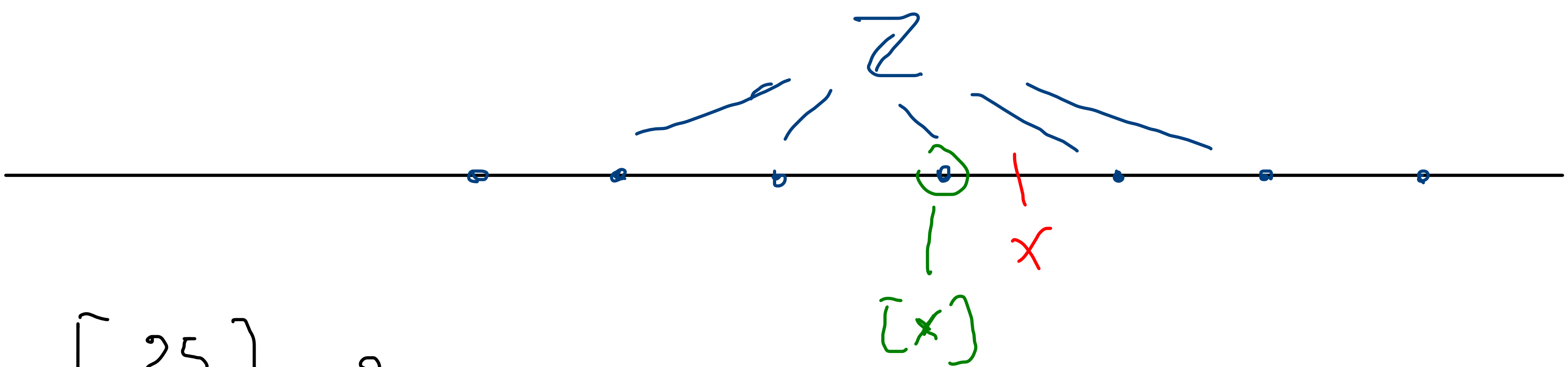
$(+\infty)(-\infty) = -\infty$

$(-\infty)(-\infty) = +\infty$.

Oss: Dato $A \subset \mathbb{Z}$ se A è superiormente limitato allora A ha massimo e se A è inferiormente limitato allora A ha minimo.

Def: Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice parte intera di x e si indica con $[x]$ il numero

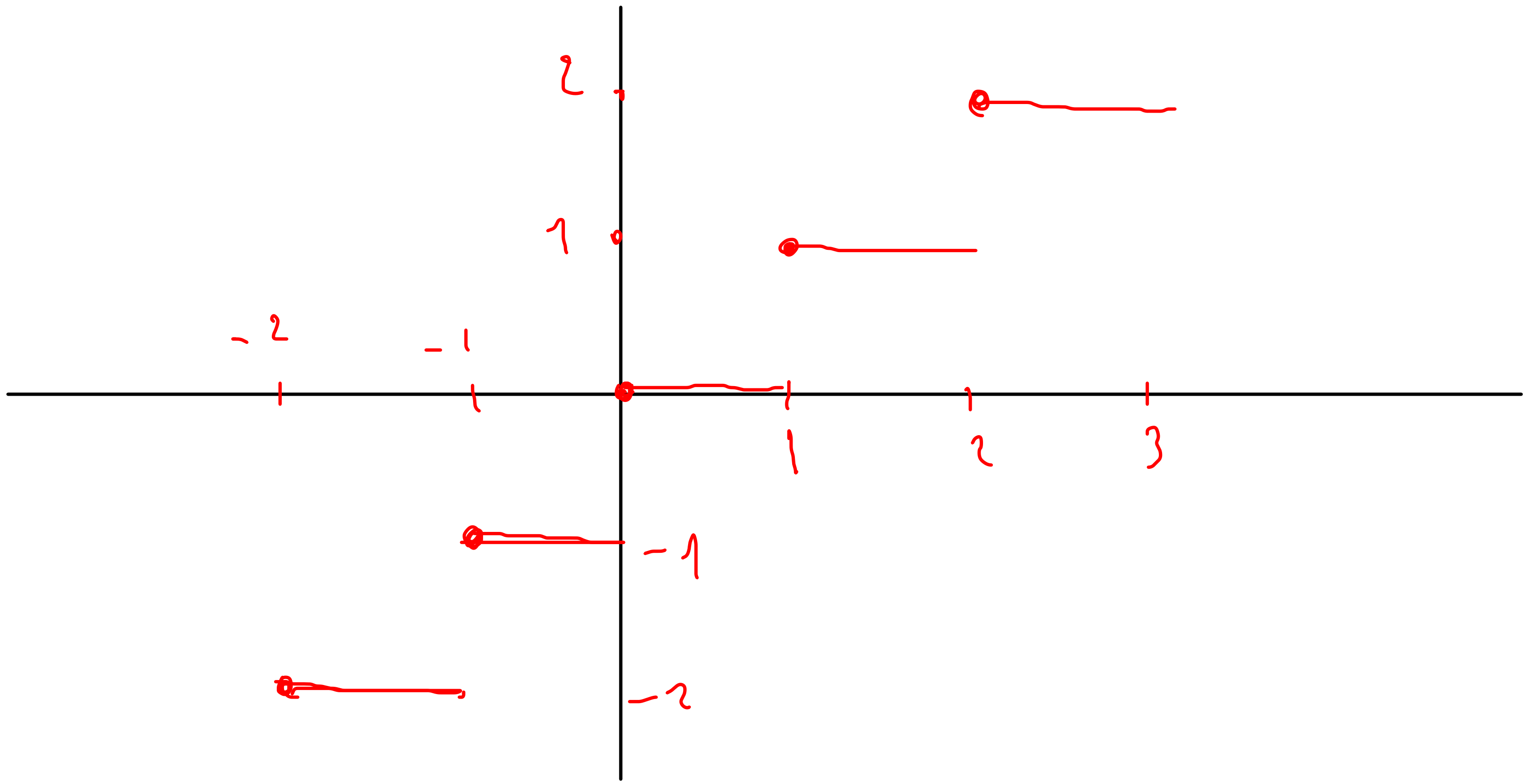
$$[x] = \max\{ m \in \mathbb{Z} : m \le x \}$$



Es: $\left[\frac{25}{10}\right] = 2$

$$\left[-\frac{25}{10}\right] = -3$$

Grafico di $f(x) = [x]$



Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$

a) f si dice limitata superiormente se $f(A)$ è limitato superiormente (limitata inferiormente limitata).

b) f ha massimo se $f(A)$ ha massimo si dice che M è il massimo di f e si scrive $M = \max(f)$ se $M = \max(f(A))$.

[Lo stesso per $\min(f)$].

c) $\sup(f) = \sup(f(A))$

se f non è limitata superiormente

si scrive $\sup(f) = +\infty$.

non limitata inferiormente $\inf(f) = -\infty$.

d) Se f ha massimo allora ogni $x_0 \in A$

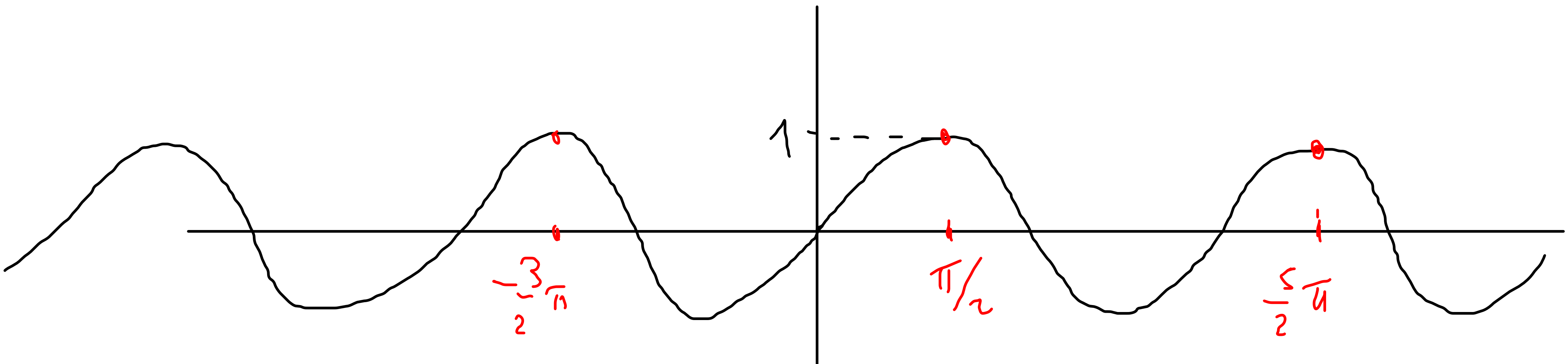
tale che $f(x_0) = \max(f)$ si dice punto

di massimo per f. Lo stesso per i

punti di minimo.

Oss: Il massimo di f è unico, i punti di massimo potrebbero essere molti.

Es: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sin x$



$\max(f) = 1$

$x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono tutti punti di max.

__Es__: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$

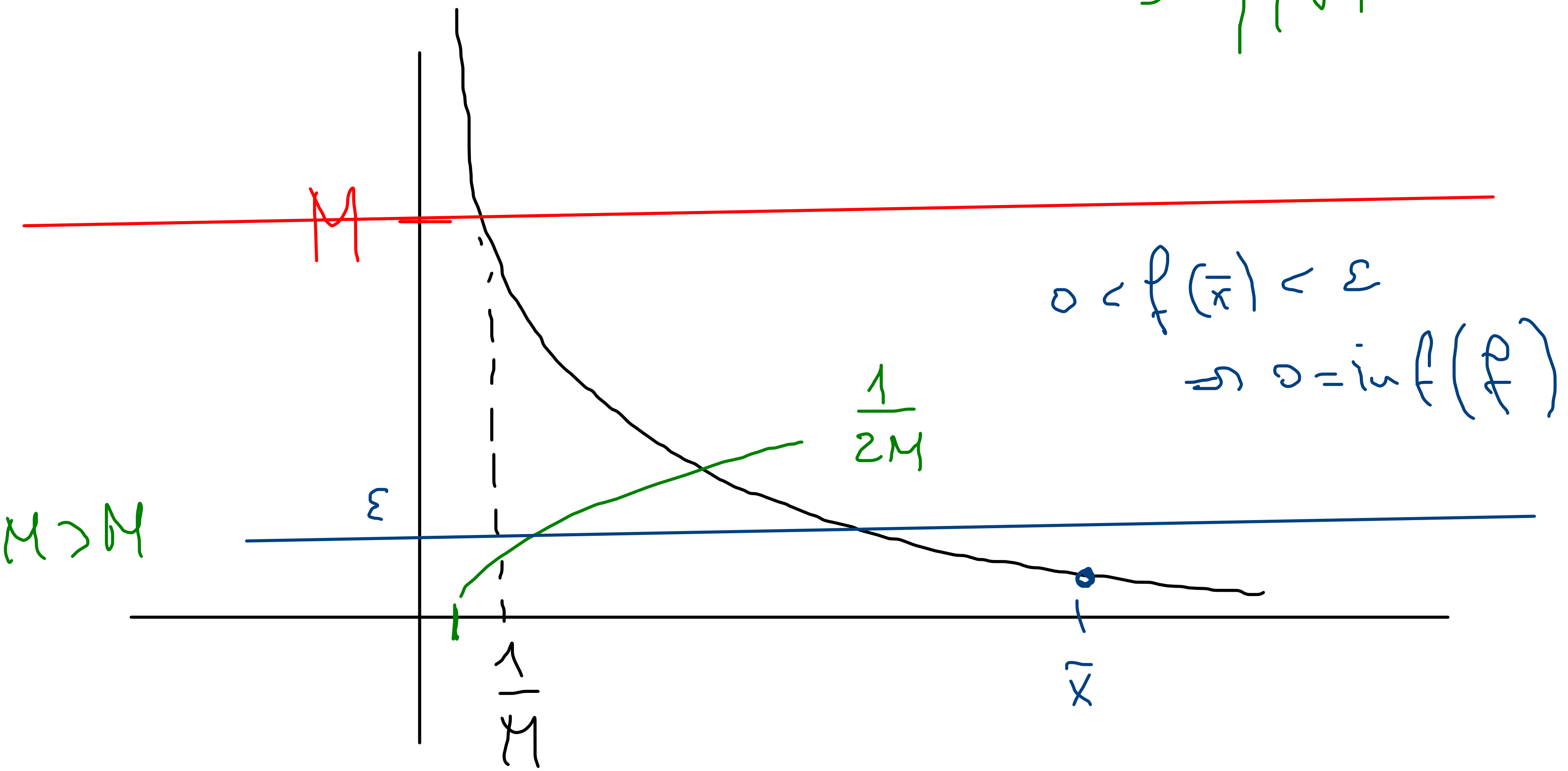
f non ha né max né min

$\sup(f) = +\infty$

$M > 0$

$f\left(\frac{1}{M}\right) = M$

$f\left(\frac{1}{2M}\right) = 2M > M$



$0 < f(\bar{x}) < \varepsilon$

$\Rightarrow 0 = \inf(f)$.

Se avesse massimo $\Rightarrow \exists\, M$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall\, x \in (0, +\infty)$

$f(x) > 0 \;\; \forall x \Rightarrow 0$ è un minorante $\quad 0 = \inf(f)$

Se f avesse minimo allora dovrebbe essere

$$\min(f) = \inf(f) = 0$$

$\Rightarrow$ dovrebbe esistere x_0 t.c. $f(x_0) = 0$

cioè $\frac{1}{x_0} = 0$ impossibile.

Oss: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$.

a) Se A ha massimo e f è debolmente crescente, allora f ha max e

$$\max(f) = f(\max(A))$$

b) Se A ha minimo e f è deb. crescente allora f ha minimo e

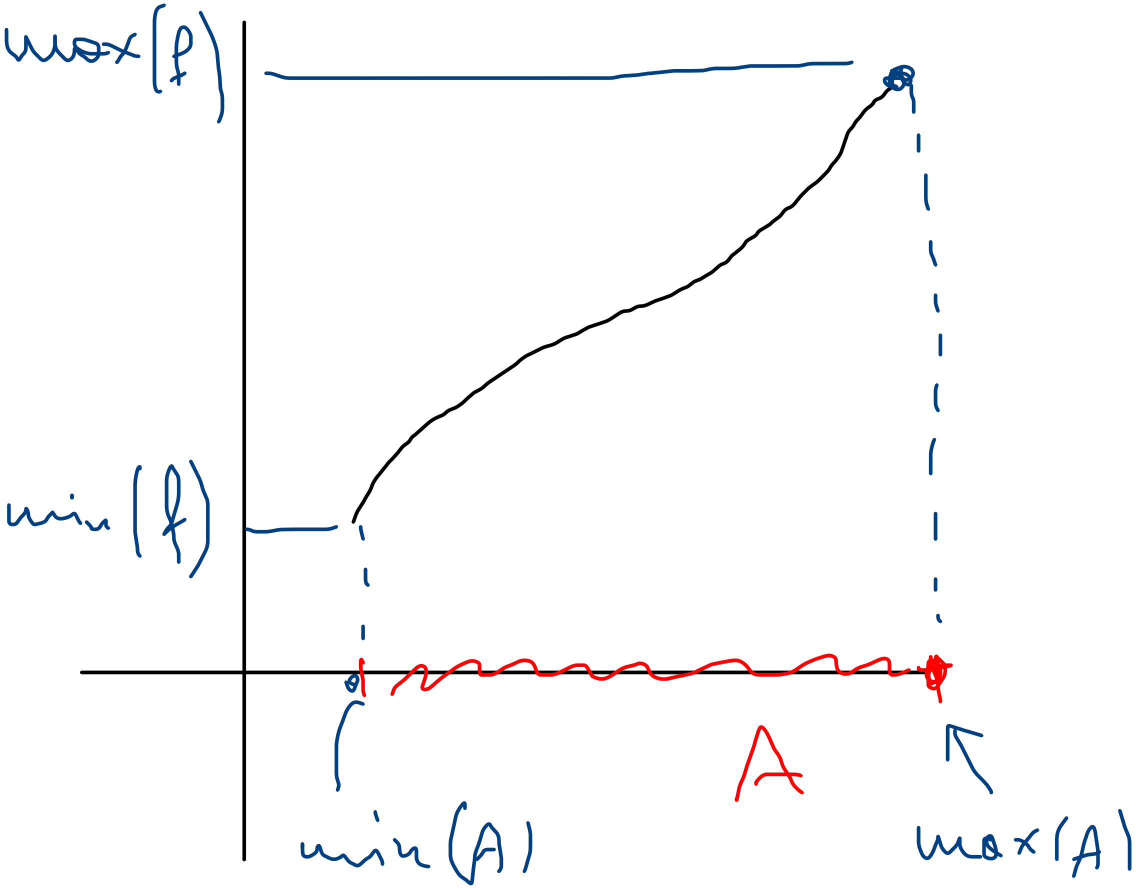
$$\min(f) = f(\min(A)).$$

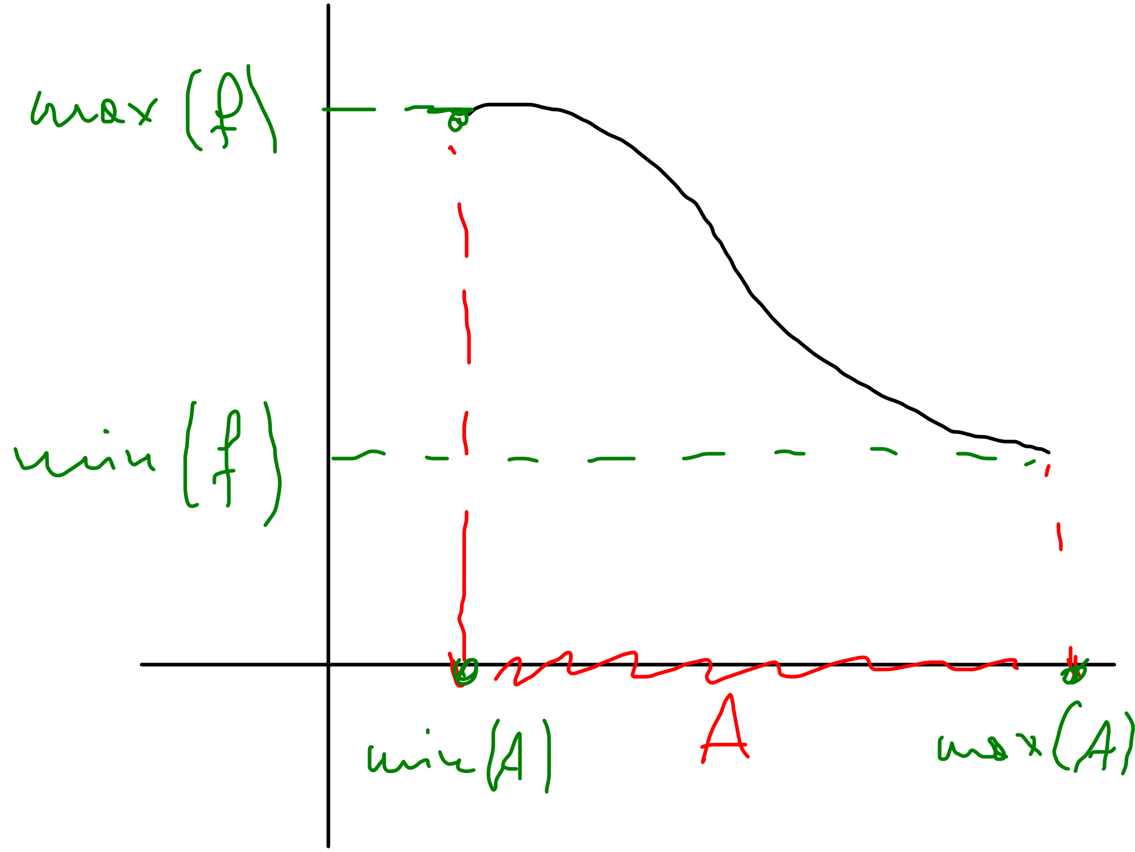
c) Se A ha max e f è deb. decrescente allora f ha minimo e

$$\min(f) = f(\max(A))$$

d) Se A ha minimo e f è deb. decrescente allora f ha massimo e

$$\max(f) = f(\min(A)).$$


max(f)
min(f)
min(A)
A
max(A)

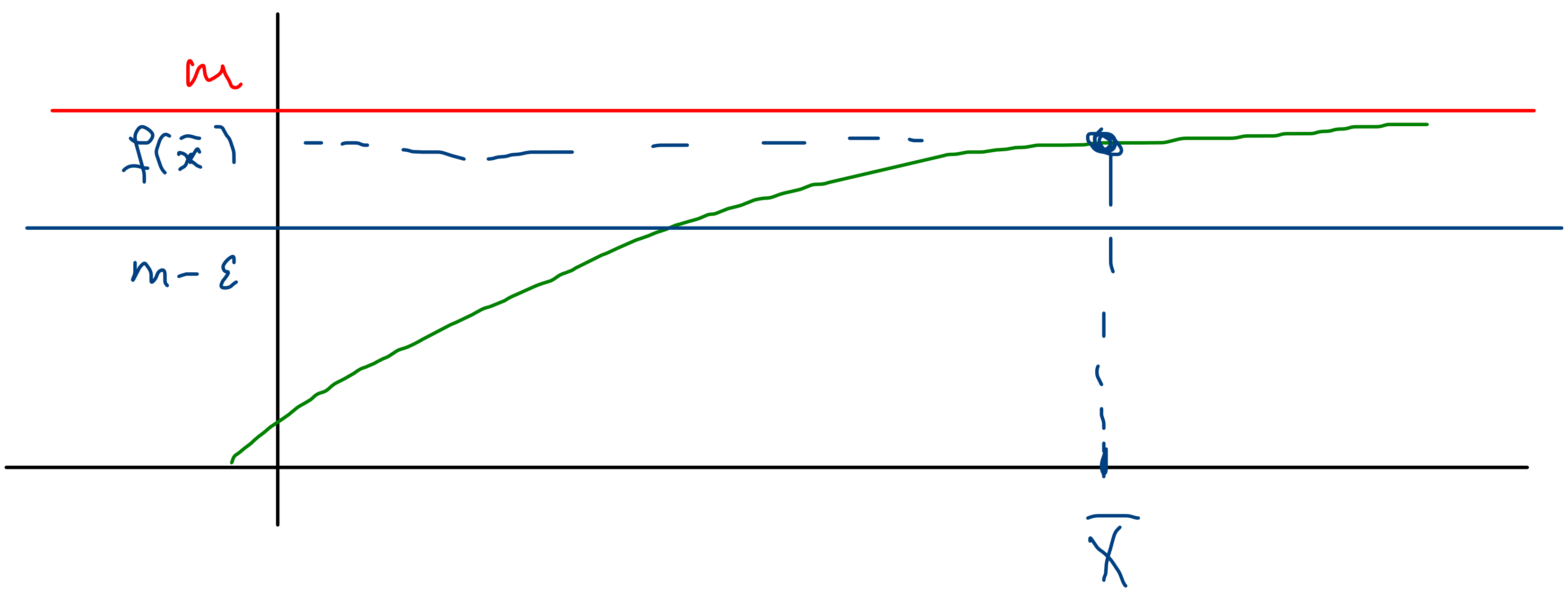

max(f)
min(f)
min(A)
A
max(A)

Oss: $f: A \to \mathbb{R}$ allora $m = \sup(f)$

se e solo se valgono

1) $f(x) \leq m \quad \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} \in A$ t.c. $f(\bar{x}) > m - \varepsilon$



Valore assoluto

<u>Def</u>: Data $x \in \mathbb{R}$ si dice valore assoluto di x e si indica con $|x|$ il numero

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

<u>Es</u>: $|5| = \max\{5, -5\} = 5$

$$|-3| = \max\{-3, -(-3)\} = 3$$

Proprietà di $|x|$.

1) $x \leq |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

2) $|x| = x$ se $x \geq 0$, $|x| = -x$ se $x \leq 0$

3) $|x| \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

4) $|x| = 0 \iff x = 0$

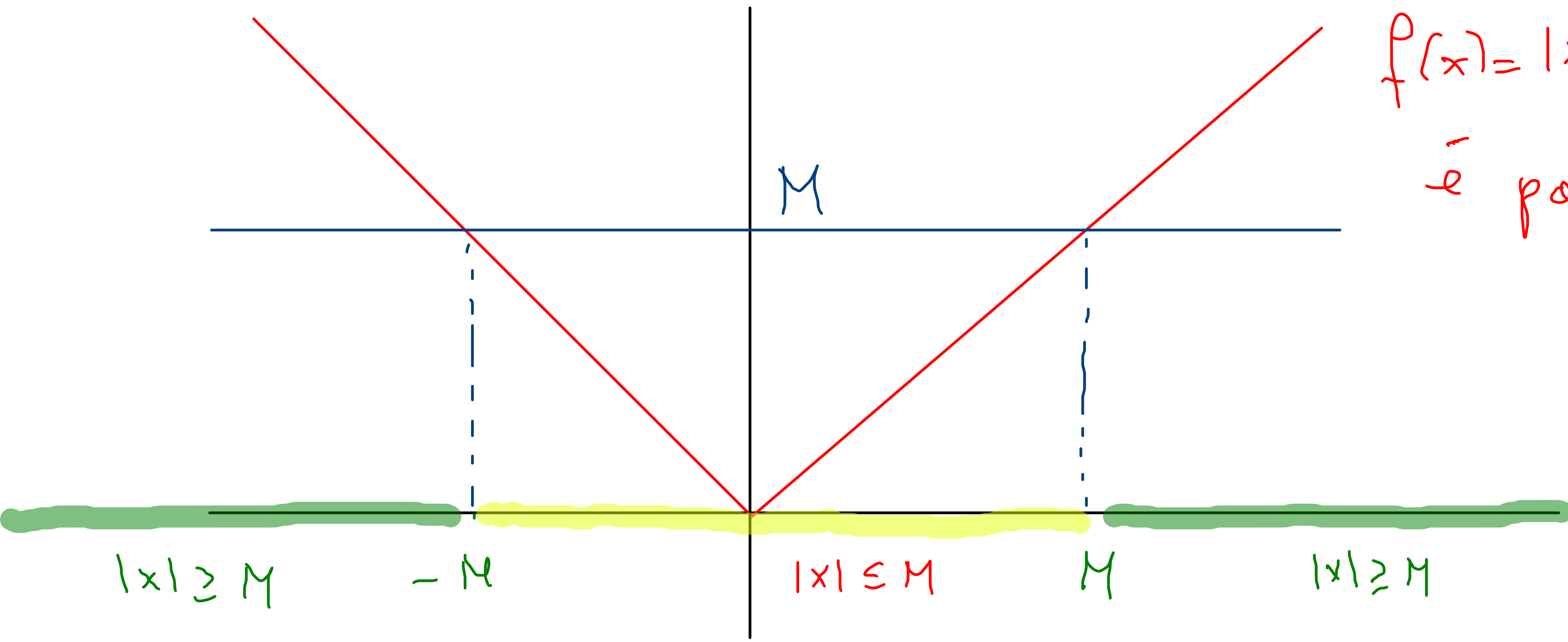
5) $|-x| = |x|$

6) $-|x| \leq x \leq |x|$

7) $|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M \quad (M \geq 0)$

8) $|x| \geq M \iff x \geq M$ oppure $x \leq -M$.

$f(x) = |x|$ è pari



$|x| \le M \iff -M \le x \le M$

$|x| \ge M \iff x \le -M$ oppure $x \ge M$.

Oss: Se $M<0$ $|x| \geq M$?

quali sono le soluzioni di $|x| \geq -3$?

ogni $x \in \mathbb{R}$.

---

le soluzioni di $|x| \leq -3$?

nessun $x \in \mathbb{R}$ non ha soluzione

Disuguaglianza triangolare

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ risulta che

1) $|a+b| \leq |a| + |b|$

2) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

dim 1): $\quad -|a| \leq a \leq |a|$ somma le disuguaglianze

$\quad -|b| \leq b \leq |b|$

$$-|a| - |b| \leq a+b \leq |a| + |b|$$

$$\underbrace{-(|a|+|b|)}_{-M} \leq \underbrace{a+b}_{x} \leq \underbrace{(|a|+|b|)}_{M}$$

$|x| \leq M$

cioè

$|a+b| \leq |a| + |b|$.

Oss: $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

perché? $|a+b+c| = |(a+b)+c| \leq |a+b|+|c| \leq$

$\leq |a|+|b|+|c|.$

Vale anche con più elementi

$$|a_1+a_2+a_3+\dots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+|a_3|+\dots+|a_n|.$$