Esercitazione 1, 23/09/2020

Esercizio 1: trovare l'inversa di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

data da $f(x) = 5x+3$.

Ricordiamo che l'inversa di $f: A \to B$ (bigettiva)

è la funzione $f^{-1}: B \to A$ definita

come $f^{-1}(b) =$ quell'unico $a \in A$ tale che

$$f(a) = b.$$

esistenza di a $\iff$ suriettività di f

unicità di a $\iff$ iniettività di f

altro modo di descrivere $f^{-1}(b)$:

unica soluzione dell'"equazione"

$$f(x) = b.$$

Nell'esercizio, devo descrivere $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Pensiamo di fissare $b \in \mathbb{R}$ ← codominio di f

Chi è $f^{-1}(b)$? È la soluzione dell'equazione

$f(x) = b$. Se $f(x) = 5x+3$,

l'eq che devo risolvere è $5x+3 = b$.

Ora ricavo la x: $5x = b - 3 \rightsquigarrow x = \frac{b-3}{5}$

Quindi $f^{-1}(b) = \frac{b-3}{5}$.

Se volete usare x per la variabile indipendente, si può scrivere che $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$.

Verifichiamo (in più) che $f(f^{-1}(x)) = x$ (analogam. verificate $f^{-1}(f(x)) = x$)

$$f(\underline{f^{-1}(x)}) = f\left(\frac{x-3}{5}\right) = \cancel{5} \cdot \frac{x-3}{\cancel{5}} + 3$$

$$= x - 3 + 3 = x.$$

Esercizio 2: dominio ("naturale") di $f(x) = \sqrt{-\log(x^3-1)}$.

Cose a cui stare attenti quando si calcola un dominio:

- denominatori (imporre che siano $\neq 0$)
- radici di indice pari, cioè $\sqrt{\ }, \sqrt[4]{\ }, \sqrt[6]{\ }$ (imporre che l'argomento sia ≥ 0)
- logaritmi (imporre che l'argomento sia > 0)
- arcsin, arccos (imporre " " stia in $[-1, 1]$)

Nel caso specifico dobbiamo imporre:

- $x^3-1>0$ (per il log)
- $-\log(x^3-1)\geq 0$ (per la $\sqrt{\ }$).

Le x nel dominio sono quelle che soddisfano entrambe.

$$x^3-1>0 \iff x^3>1 \iff \boxed{x>1}$$

"se e solo se"

Attenzione! Questo vale per le potenze dispari.

<u>N.B.</u> log è logaritmo in base e.

$$-\log(x^3-1)\geq 0 \iff \log(x^3-1)\leq 0 \ (=\log(e^0))$$

$x=\log(e^x)$

Questo è equivalente a $x^3-1\leq e^0$

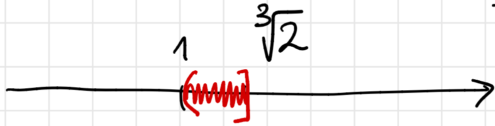
[Sto usando che $\log A\leq \log B \iff A\leq B$.

Analogamente $e^A\leq e^B \iff A\leq B$

Attenzione! Se la base del logaritmo ($e>0$) sono <1, le disuguaglianze si invertono, cioè ad es. $\left(\frac{1}{2}\right)^A\leq\left(\frac{1}{2}\right)^B \iff A\geq B$]

$$x^3-1\leq e^0=1 \iff x^3\leq 2 \iff \boxed{x\leq\sqrt[3]{2}}$$

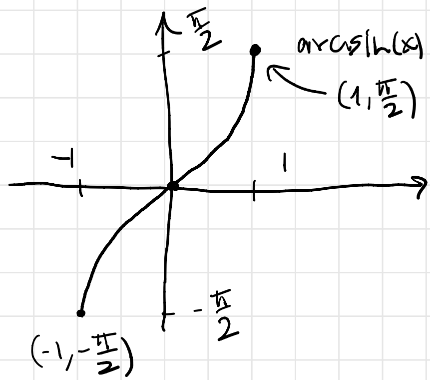
Quindi il domio della funzione sono gli x tali che $x > 1$ e $x \le \sqrt[3]{2}$

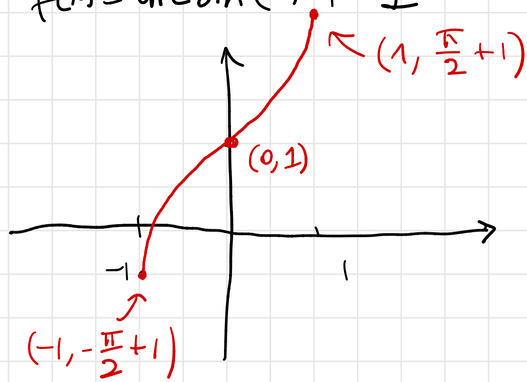


$\boxed{\text{il dominio è } (1, \sqrt[3]{2}].}$

Si può scrivere anche $\begin{cases} x > 1 \\ x \le \sqrt[3]{2} \end{cases}$.

Esercizio 3. Grafico di $f(x) = \arcsin(x) + 1$





(traslando il grafico di $\arcsin(x)$ di 1 verso l'alto)

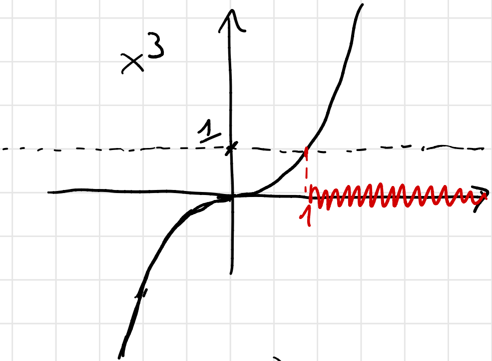
Esercizio 4: risolvere $\log(x^4 - 1) \le 0$.

Affinché log sia definito serve $x^4 - 1 > 0$.

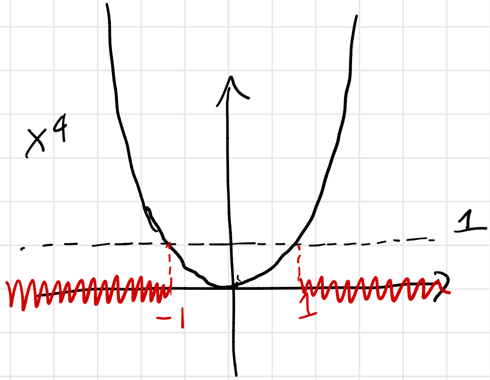
Risolviamo $x^4 - 1 > 0 \iff x^4 > 1$

Adesso, ! $x^4 > 1$ non è equivalente a $x > \sqrt[4]{1} = 1$

Graficamente



$(x^3 > 1)$



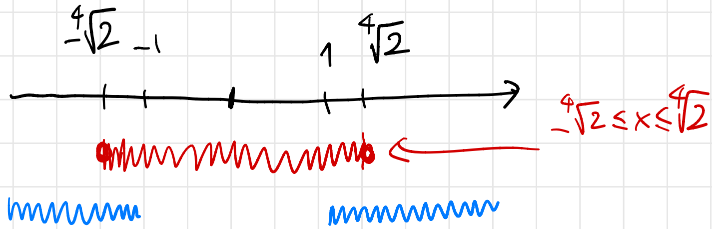
$(x^4 > 1)$

Quindi $x^4 > 1 \iff x > 1$ <u>oppure</u> $x < -1$

$\log(x^4 - 1) \leq 0 \iff x^4 - 1 \leq e^0 = 1 \iff x^4 \leq 2$

e $x^4 \leq 2 \iff -\sqrt[4]{2} \leq x \leq \sqrt[4]{2}$

In conclusione,



le x che soddisfano entrambe le disequazioni sono quelle che soddisfano $-\sqrt[4]{2} \leq x < -1$ oppure $1 < x \leq \sqrt[4]{2}$.

L'insieme delle sol. è quindi

$$[-\sqrt[4]{2}, -1) \cup (1, \sqrt[4]{2}] .$$

"unione"

Esercizio 10.

Determinare $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ tale che

$$\sin(x+\alpha) = \cos(x-\alpha) \quad \text{sia valida } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Diversi modi:

- usare le formule di addizione e vedere cosa succede.

$$\sin(x+\alpha) = \sin(x)\cos(\alpha) + \cos(x)\sin(\alpha)$$

$$\cos(x-\alpha) = \cos(x)\cos(-\alpha) - \sin(x)\sin(-\alpha)$$

$$= \cos(x)\cos(\alpha) + \sin(x)\sin(\alpha)$$

L'equazione è

$$\sin(x)\cos(\alpha) + \cos(x)\sin(\alpha) = \cos(x)\cos(\alpha) + \sin(x)\sin(\alpha)$$

$$\iff \sin(x)\cos(\alpha) + \cos(x)\sin(\alpha) - \cos(x)\cos(\alpha) - \sin(x)\sin(\alpha) = 0.$$

$$\iff \sin(x)\left(\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\right) + \cos(x)\left(\sin(\alpha) - \cos(\alpha)\right) = 0.$$

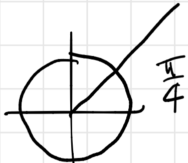
$$\iff \left(\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\right)\left(\sin(x) - \cos(x)\right) = 0.$$

Voglio che questa sia soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}$.

Se α è tale che $\cos(\alpha) - \sin(\alpha) = 0$, siamo a posto.

$$\cos(\alpha) - \sin(\alpha) = 0 \iff \cos(\alpha) = \sin(\alpha) \iff \alpha = \frac{\pi}{4} \quad (= 45°)$$

visto che $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Verificate (direttamente) che

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

- Alternativamente, usare che $\sin(A) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$

  Quindi $\sin(x+\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \alpha\right)$

  e mi ritrovo l'equazione

  $$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \alpha\right) = \cos(x - \alpha)$$

  E ora si usa che $\cos A = \cos B$

  se e solo se $A = B + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

  oppure $A = -B + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

  quindi abbiamo $\frac{\pi}{2} - x - \alpha = x - \alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

  oppure $\frac{\pi}{2} - x - \alpha = -x + \alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

  (esercizio: finite l'esercizio da qui)

- Alternativamente, scrivete $\sin(x+\alpha) - \cos(x-\alpha) = 0$

  e usate prostaferesi ...

- $\sin(x+\alpha) = \cos(x-\alpha)$ deve valere per <u>ogni</u> $x \in \mathbb{R}$.

In particolare deve valere per $x=0$.

Se metto $x=0$, rimane $\sin(\alpha) = \cos(-\alpha)$

$(=\cos(\alpha))$.

Da qui vedete subito che

l'unica possibilità in $[0, \frac{\pi}{2}]$ è $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Ora bisogna controllare che $\alpha = \frac{\pi}{4}$ funziona $\forall x$,

cioè $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

(con le formule di addizione).

<u>Esercizio 12</u> : Disegnare l'insieme degli $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

t.c.
$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{x} \leq y \leq \log(x+1). \end{cases}$$

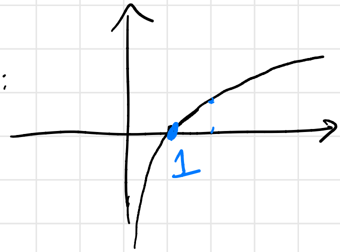
È una domanda sui grafici di $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \log(x+1)$

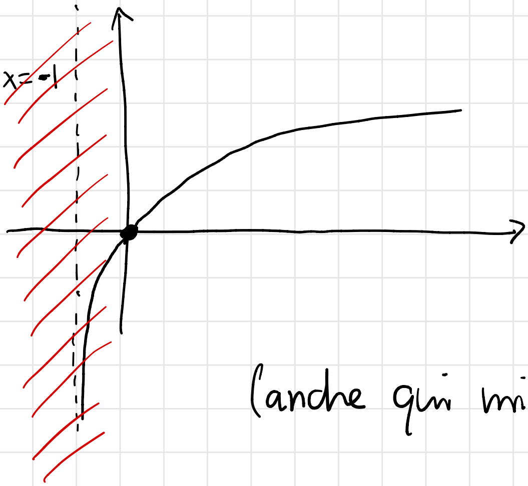
Disegniamo i grafici.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$g(x)=\log(x+1)$

grafico di $\log(x)$:



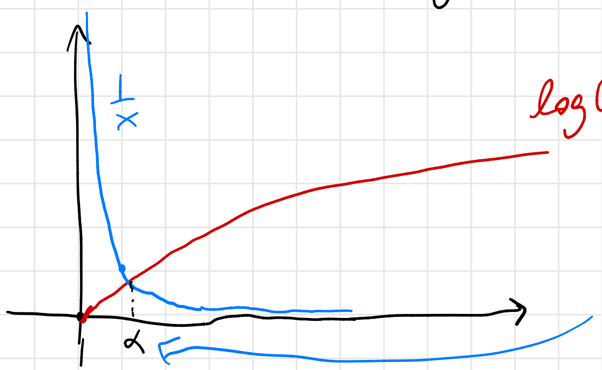


si trasla il grafico a destra o a $\boxed{\text{sinistra}}$ di 1.

$$g(0)=\log(1)=0$$

(anche qui mi interessano solo le x positive)

Mettiamo insieme i due grafici:



è la soluzione >0 di $\frac{1}{x}=\log(x+1)$

Chi è l'insieme degli (x,y) t.c. $\begin{cases} x>0 \\ \frac{1}{x}\leq y\leq \log(x+1) \end{cases}$

se (x,y) è in questo insieme, in particolare vale che $\frac{1}{x}\leq \log(1+x)$

Quindi se (x,y) sta nel mio insieme,

necessariamente ho $x \geq \alpha$.

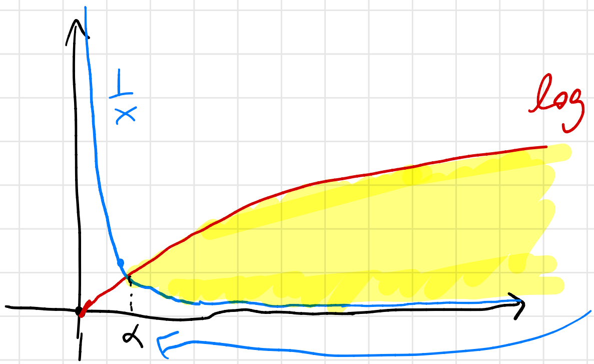
se $x \geq \alpha$, dire $\frac{1}{x} \leq y \leq \log(x+1)$

corrisponde a dire che (x,y) sta

sopra il grafico di $\frac{1}{x}$ e sotto il grafico

di $\log(x+1)$

Quindi il disegno è:



Esercizio 14 : disequazione $\log(\log(x)) > 0$.

Affinché $\log(\log(x))$ abbia senso, serve che:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log(x) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x > e^0 = 1 \end{cases}$$

Quindi $\boxed{x > 1}$.

Ora per questi x, risolviamo.

$$\log(\log(x)) > 0 \iff \log(x) > e^0 = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x > e^1 = e}$$

Ora devo guardare le x t.c. $x > 1$ $\underline{\underline{e}}$ $x > e$

e queste sono le $x > e$.

<u>Esercizio 5</u> . Esprimere $(\sin(2x))^2$ in funzione di $\sin(x)$.

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ (f. di duplicazione)

Quindi $(\sin(2x))^2 = 4\sin^2(x)\underline{\cos^2(x)}$.

Ricordiamo che $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Quindi $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.

Quindi $4\sin^2(x)\cos^2(x) = 4\sin^2(x)(1 - \sin^2(x))$.

e questa espressione è completam. in funzione di $\sin(x)$.

<u>Esercizio 8</u>: Determinare il dominio di

$f(x) = \arcsin(2e^x)$.

$f(x)$ è una funzione composta

$$x \longmapsto 2e^x \longmapsto \arcsin(2e^x)$$

Bisogna assicurarsi che l'argomento dell'arcsin stia dentro al suo dominio, cioè $[-1, 1]$.

Si risolve la disequazione

$$-1 \leq 2e^x \leq 1.$$

(esercizio)