Fattoriale

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ definiamo

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$

prodotto dei primi n numeri naturali.

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = (1 \cdot 2 \cdot 3)\, 4 = 6 \cdot 4 = 24$

$5! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot 5 = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$

nei casi concreti è una semplice notazione

ma $n!$, con n variabile in $\mathbb{N}$ è una definizione induttiva.

$$(n+1)! = n!\,(n+1)$$

$$\underbrace{[1 \cdot 2 \cdots n]}_{n!}(n+1) = n!\,(n+1)$$

$0! = 1$ per definizione

Definizione per ricorrenza (induttiva)

$f(n) = n!$ è $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = (n+1)\cdot f(n) \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

Osservazione

$n!$, con n generico variabile, non può essere espresso mediante un numero prefissato di iterazioni delle 4 operazioni sulla variabile n.

in altro linguaggio: non può essere espresso in forma chiusa da rapporti di polinomi nella variabile n.

Infatti dato un qualsiasi polinomio monico

$$c_0 + c_1 n + \dots + n^k = P(n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{P(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^k} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} \cdot (n-k) = +\infty$$

$\nearrow 1$ $\nearrow 1$ $\nearrow 1$ $\nearrow +\infty$ $n \to +\infty$

NOTA

- per l'interpretazione combinatorica
  cfr. GRAHAM - KNUTH - PATASHNIK (GKP)
  "Concrete Mathematics"
  "a foundation of Compute Science"
  ADDISON-WESLEY PUB. Co. 1st ed. 1989
  pag. 111, e per approfondimenti CAP. 4.4.
- Per le definizioni ricorrenti GKP CAP. 1

Sommatorie.

numeri reali indicizzati con un numero naturale (i.e. $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ successione)

$a_1, a_2, \dots, a_n$ $\qquad a_j \in \mathbb{R} \quad j \in \mathbb{N}.$

$a_j = \frac{1}{j} \qquad a_1 = \frac{1}{1} \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3}$

oppure

$a_j = \sqrt{j} \qquad a_1 = \sqrt{1} \quad a_2 = \sqrt{2} \quad a_3 = \sqrt{3} \quad \dots$

Quindi data una successione a_n, $n \in \mathbb{N}$, si definisce la sommatoria degli a_j per j che va da m ad n dove $m, n \in \mathbb{N}$ $m \leq n$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

Es: $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ somma armonica

Es: $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} j^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

$$\sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j} = \sum_{k=3}^{5} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$k=3 \quad k=4 \quad k=5$

Questa nei casi concreti è solo una notazione. Se m ed n sono variabili diventa una

Definizione per ricorrenza

Data $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, si definisce la successione $\sum_{j=m}^{n} a_j$ per $n \geq m$:

$$\begin{cases} S(m) = a_m \\ S(n) = n + S(n-1) \quad n > m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=m}^{m} a_j = a_m \\ \sum_{j=m}^{n} a_j = a_n + \sum_{j=m}^{n-1} a_j \quad \text{per } n > m \end{cases}$$

Per approfondimenti cfr GKP CAP. 2

Osservazione

- Per molte successioni $a_0, a_1, \dots, a_j, \dots$ la successione $S_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$, come per $n!$, non può essere espressa con l'iterazione finita e prefissata (indipendente da n) di funzioni ed operazioni elementari su n.

e.g. i numeri armonici $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} =: H_n$

- .. Ci sono notevoli eccezioni

$a_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{j=0}^{n} 1 = n+1 = \overbrace{\underset{a_0}{1} + \dots + \underset{a_n}{1}}^{n+1 \text{ addendi}}$

$a_n = x^n \ \forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{j=0}^{n} x^j = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ se $x \neq 1$ progressione geometrica

$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$: $\sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n} \left(\dfrac{1}{j} - \dfrac{1}{j+1} \right) = 1 - \cancel{\dfrac{1}{2}} + \cancel{\dfrac{1}{2}} - \dfrac{1}{3} + \dots + \cancel{\dfrac{1}{n}} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

Problema:

Se $m > n$, cosa intendere con

$$\sum_{j=m}^{n} a_j \text{ ?}$$

Produttorie

In modo del tutto analogo data a_n, $n \in \mathbb{N}$ si definisce

$$\prod_{n=m}^{n} a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n \qquad n \geq m$$

$$\begin{cases} P(m) = a_m \\ P(n) = a_n P(n-1) \\ \qquad n > m \end{cases} \qquad \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=m}^{m} a_j = a_m \\ \displaystyle\prod_{j=m}^{n} a_j = a_n \cdot \prod_{j=m}^{n-1} a_j \qquad n > m \end{cases}$$

Per esempio, per $\underline{n \geq 1}$ con $a_n = n$, si ha

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j$$

Formula di Taylor

f derivabile nel punto $x_0 \in (a,b)$.

allora (equivale a)

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{polinomio di grado 1}} + \overbrace{o(x - x_0)}^{\text{resto}}$$

per $x \to x_0$

f differisce dal polinomio per un resto che è infinitesimo rispetto a $x - x_0$ cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

posso precisare meglio la quantità $o(x-x_0)$?

SI se f è derivabile più volte nel punto x_0.

Formula di Taylor con resto di Peano

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. Se f è derivabile n volte in x_0 e almeno $n-1$ volte nel resto dell'intervallo (a,b) (cioè in $(a,b)\setminus\{x_0\}$), allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado $\boxed{\leq n}$ e una funzione $R_n(x)$ t.c.

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

e $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ per $x\to x_0$.

Formula di Taylor con resto di Peano

$f:(a;b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a;b)$,

se f è derivabile n volte in x_0, quindi in particolare f è derivabile $n-1$ volte in un intorno di x_0 (e.g. $(a;b)$)

allora

per ogni $n\in\mathbb{N}$

esiste un $\boxed{\text{unico}}$ polinomio $P_{n,x_0}(x)$ (in breve P_n) tale che valgon le seguenti due proprietà

1) grado $P_n \leq n$

2) $f(x)-P_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ per $x\to x_0$

Inoltre $P_{n,x_0}(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$

In altri termini esiste un unico polinomio con le seguenti due proprietà:

1) $\deg P_n \leq n$

2') $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ con $R_n = o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$

ovvero in modo più breve

1) $\deg P_n \leq n$

2'') $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$, $x \to x_0$

Tale unico polinomio è dato da

$$P_{n,x_0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

Il polinomio $P_n(x)$ ha la seguente forma

$$P_{n,x_0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

cioè

$j=0$ $\quad$ $j=1$ $\quad$ $j=2$

$$P_n(x) = f(x_0) + \boxed{f'(x_0)(x-x_0)} + \boxed{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2} +$$

$$+ \boxed{\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3} + \cdots + \boxed{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}.$$

$j=3$ $\quad$ $j=n$

Oss: Il grado del polinomio è correlato all'ordine in infinitesimo del resto.

P_{n,x_0} è di $\leq$ grado n e $R_n = o((x-x_0)^n)$.

$$\boxed{f(x) - P_n(x) = \underbrace{o((x-x_0)^n)}}$$

differenza tra la funzione e il polinomio che la approssima.

Formula di Taylor con il resto di Lagrange

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ f derivabile $n+1$ volte in $(a,b) \setminus \{x_0\}$ e n volte in x_0, ed ivi continua. → serve per il caso $n=0$

Allora $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

ed esiste z compreso strettamente tra x e x_0 t.c.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)\,(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = O\left((x-x_0)^{n+1}\right)$$

$o\left((x-x_0)^n\right) \cup$

$z \in \left(\min\{x, x_0\};\ \max\{x, x_0\}\right)$

Osservazione: per $n=0$ è il teorema di Lagrange sull'intervallo di estremi x e x_0

Osservazione: z dipende da x, x_0 ed n: $z = z(x, x_0, n)$

Esempi di formula di Taylor

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x \; \dots \; f^{(j)}(x) = e^x$

$\forall j \in \mathbb{N}.$

La calcolo in $x_0 = 0$.

$f(0) = e^0 = 1 \qquad f'(0) = e^0 = 1 \quad \dots \quad f^{(j)}(0) = 1$

$$e^x = \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}\right] + o(x^n) = \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}(x-0)^j\right] + o(x^n) \qquad f^{(j)}(0) \to 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$o(x^n) = O(x^{n+1})$$

Nel caso con il resto di Lagrange

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + e^z \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

z strettam. tra x e 0

e.g. se $x>0$

$z \in (0, x)$

Una via di mezzo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$R_n \le e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

ordine 2

$$e^x = 1 + x + \underbrace{\boxed{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}}_{\tilde{R}_2(x)}$$

$$e^x = 1 + x + \underbrace{\boxed{o(x)}}_{R_1(x)}$$

oss: $\tilde{R}_2(x)$ in particolare è $o(x)$

$$\frac{\tilde{R}_2(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} = \frac{x}{2} + o(x) \longrightarrow 0$$

se $x \to 0$.

$$\frac{\tilde{R}_2(x)}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1)$$

è limitato in un intorno di x_0

$x_0 = 0$

$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x \qquad f'''(x) = -\cos x$

$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = -1.$

$$\sin x = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + R_n(x)$$

(0) $\sin 0 = 0$

(1) $\cos 0 = 1$

(2) $-\sin 0 = 0$

(3) $-\cos 0 = -1$

(4) $\sin 0 = 0$

$\vdots$

$$\sin x = 0 + 1 \cdot \frac{x}{1} + 0 \cdot \frac{x^2}{2} - 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$= \underbrace{\boxed{x - \frac{x^3}{6}}}_{P_3(x)} + \underbrace{o(x^3)}_{R_3(x)} .$$

ordine $n = 3$.

$f(0) = -f(0) \longrightarrow f(0) = 0$

$f(x) = -f(-x)$

$f''(x) = -f''(-x)$

$f'(x) = \cancel{-} f'(-x)$

ordine 4

$$\sin x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} - 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

sin cos -sin -cos sin cos -sin

$$= \underbrace{\boxed{x - \frac{x^3}{6}}}_{P_4(x)} + \underbrace{o(x^4)}_{R_4(x)} = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

per Lagrange di $R_4(x)$

UNICITÀ

$P_3(x) = P_4(x)$ in questo caso.

In generale per la funzione $\sin x$,

$$\underbrace{P_{2n+1,0}(x) = P_{2n+2,0}(x)}_{\text{disparità della funzione}} \quad e \quad \underbrace{R_{2n+1,0}(x) = O(x^{2n+3})}_{\text{per Lagrange di } R_{2n+2}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \leftarrow \text{ordine 3}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad \leftarrow \text{ordine 4}$$

sono vere entrambe ma la seconda

è più precisa.

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\sin x = x + o(x^2) \quad \leftarrow \text{è più precisa}$$

$$\sin x = x + O(x^3) \quad \text{un poco ancora più precisa}$$

$$\sin x = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}\right) + o\left(x^{2n+2}\right)$$

P_{2n+1}

$O(x^{2n+3})$ ← dal resto di Lagrange per R_{2n+2}

$R_{2n+1} = R_{2n+2}$

solo potenze dispari

come esprimere l'alternanza di segni in una somma

$(-1)^j$ se parto $+$ / $(-1)^{j+1}$ se parto da $-$

$n = 2$

$$\frac{(-1)^0 x^{2\cdot 0+1}}{(2\cdot 0+1)!} + \frac{(-1)^1 x^{2\cdot 1+1}}{(2\cdot 1+1)!} + \frac{(-1)^2 x^{2\cdot 2+1}}{(2\cdot 2+1)!} + o\left(x^{2\cdot 2+2}\right)$$

$$= x^1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^6\right)$$

$O(x^7)$

dal resto di Lagrange di P_6

$$\cos x = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j \, x^{2j}}{(2j)!} \right) + o(x^{2n+1}) \quad O(x^{2n+2})$$

$\rightarrow R_{2n} = R_{2n+1}$

P_{2n}

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$$

$\rightarrow$ potenze pari

$O(x^8)$

In generale per la funzione $\cos x$

$$\boxed{P_{2n,0}(x) = P_{2n+1,0}(x)} \quad e \quad \boxed{R_{2n,0} = O(x^{2n+2})}$$

parità della funzione

per Lagrange di R_{2n+1}

$$f^{(m)}(x_0) \cdot \frac{1}{m!} (x - x_0)^m$$

$x_0 = 0$

$$\log(1+x) = \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}\right) + o(x^n)$$

$f(0) = \log 1 = 0$

non è fattoriale

segni alternati

$$= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$\boxed{n=4}$

per Lagrange

$O(x^5)$

$$\frac{f^{(j)}(0)}{j!} = \begin{cases} -\frac{(j-1)!}{j!} x^j & j \text{ pari} \\ \frac{(j-1)!}{j!} x^j & j \text{ dispari} \end{cases}$$

			$x_0 = 0$
(0)	$\log(1+x)$		
(1)	$\frac{1}{1+x}$	$= (1+x)^{-1}$	1
(2)	$-\frac{1}{(1+x)^2}$	$= -(1+x)^{-2}$	-1
(3)	$2\frac{1}{(1+x)^3}$	$= 2(1+x)^{-3}$	2
(4)	$-3\cdot 2\frac{1}{(1+x)^4}$	$= -3\cdot 2(1+x)^{-4}$	$-3\cdot 2$
(5)	$4\cdot 3\cdot 2\frac{1}{(1+x)^5}$	$= 4\cdot 3\cdot 2(1+x)^{-5}$	$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$$(n) \begin{cases} n = 2m & -(n-1)! \\ n = 2m+1 & (n-1)! \end{cases}$$

$x_0 = 0$

$$\operatorname{tg} x = \underbrace{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}}_{P_6} + o(x^6)$$

$O(x^7)$ Lagrange

$$\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$$

$O(x^3)$

$x_0 = 0$

$$\operatorname{arctg} x = \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \right)}_{P_{2n+2} = P_{2n+1}} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$O\left(x^{2n+3}\right)$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8)$$

$O(x^9)$

solo gradi dispari

non c'è il fattoriale.

Binomiale

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = \boxed{1 + \alpha x} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \boxed{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}} x^3 +$$

$$+ \cdots + \boxed{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}} x^n + o(x^n)$$

$(1+x)^\alpha$

$\alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

$O(x^{n+1})$

$\alpha = n$ vale la formula

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$$

$$\underbrace{(1+x)^n}_{\text{polinomio}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \cdots + n x^{n-1} + x^n$$

$$\binom{n}{j} \to \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}$$

TARTAGLIA

Osservazione:

se f è un polinomio di grado N

allora $P_{n,x_0} = f \quad \forall n \geq N$

$\boxed{R_{n,x_0} = 0}$

UNICITÀ POL. TAYLOR

Esercizio

Se f è un pol di grado N chi sono P_{n,x_0} $n < N$?

$$b_0 + b_1(x-x_0) + \dots + b_N(x-x_0)^N$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N =$$

$$= a_0 + a_1((x-x_0)+x_0) + a_2((x-x_0)+x_0)^2 + \dots + a_N((x-x_0)+x_0)^N$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ $\qquad \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$

ordine 2

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2) =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\boxed{\alpha = -1} \qquad (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - 1\cdot x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 - x + \frac{2}{2}x^2 - \frac{3!}{3!}x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$x = -t$ $$\frac{1}{1-t} = 1 - (-t) + (-t)^2 - (-t^3) + o(t^3)$$

$$= \underbrace{1 + t + t^2 + t^3}_{} + o(t^3) \qquad \frac{t^4}{1-t} = O(t^4)$$

$$\frac{1}{1-t} = \frac{1-t^4}{1-t} + \left(\frac{1}{1-t} - \frac{1-t^4}{1-t}\right) \qquad 1 + t + \dots + t^n = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

$$\frac{1}{1-t} = \underbrace{1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^n}_{\text{somme geometriche}} + o(t^n) \quad O(t^{n+1})$$

$\longrightarrow$ somme geometriche $= \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$

Es: $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1}$$

$$\sin x = x + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1} = \frac{\cancel{x} + o(x^2) \cancel{- x}}{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x) - (\cancel{x} + o(x)) \cancel{- 1}}$$

$$= \frac{o(x^2)}{o(x)} = \; ?? \quad \text{indeterminato.}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \underline{o(x^4)} \qquad P_4$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underline{o(x^2)} \qquad P_2$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underline{o(x^2)} \qquad P_2$$

$$\frac{\sin x - x}{e^{x} - \log(1+x) - 1} = \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x}}{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \cancel{1}}$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2 + o(x^2)} =$$

divido num e denom per x^2

$$= \frac{-\frac{x}{6} + o(x^2)}{1 + o(1)} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0$$

Es: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4}$

$t \to 0$ se $x \to 0$

$\sin t = t + o(t^2)$ $\quad t = x^2$

$(\sin x)^2 = (x + o(x^2))^2 = x^2 + \underline{2x\,o(x^2)} + (o(x^2))^2 =$

$= x^2 + o(x^3) + o(x^4) = x^2 + o(x^3)$

$\sin(x^2) = x^2 + o(x^4)$

$$\frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4} = \frac{\cancel{x^2} + o(x^3) - \cancel{x^2} + o(x^4)}{x^4}$$

$$= \frac{o(x^3)}{x^4} = \frac{o(x^3)}{x^3} \cdot \frac{1}{x}$$

0

$\pm\infty$ da destra o da sinistra ??

indeterminato.

aumentare il grado dell'approssimazione

devo migliorare $(\sin x)^2$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$(\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + \cancel{\left(o(x^4)\right)^2} +$$

$$-2x\cdot\frac{x^3}{6} + \cancel{2x\,o(x^4)} - \cancel{2\frac{x^3}{6}\,o(x^4)} = \quad \to o(x^4)$$

$$= x^2 + \frac{x^6}{36} + o(x^8) - \frac{x^4}{3} + o(x^5) + o(x^7) =$$

$$= \boxed{x^2 - \frac{x^4}{3}} + o(x^5)$$

$$\frac{\cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - \cancel{x^2} + o(x^4)}{x^4} \to -\frac{1}{3}$$

$$\frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4} = \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) - \left(x^2 + o(x^4)\right)}{x^4}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} - \cancel{x^2} + o(x^4)}{x^4} = \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{3} + o(1)}{1} \longrightarrow -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}.$$

Esempio (uso dell'unicità del polinomio di Taylor):

- Trovare il polinomio di Taylor di ordine 14 per $x_0=0$ della funzione

$\frac{11}{60}+\frac{1}{36}$ $\frac{33}{180}+\frac{5}{180}$

$\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{60}$ $\frac{38}{180}$ $\frac{19}{90}$

$\frac{10}{60}$

$$f(x)=\sin(x^4)-(\sin(x^2))^2$$

$$\sin y \underset{y\to 0}{=} \underbrace{y-\frac{y^3}{6}}_{P_4}+O(y^5) = \underbrace{y-\frac{y^3}{6}+\frac{y^5}{120}}_{P_6}+O(y^7)$$

$y=x^4$

$$\sin(x^4)=x^4-\frac{x^{12}}{6}+O(x^{20}) = x^4-\frac{x^{12}}{6}+o(x^{14})$$

$y=x^2$

$$\sin(x^2)=x^2-\frac{x^6}{6}+\frac{x^{10}}{120}+o(x^{14})$$

$$(\sin(x^2))^2=x^4+\frac{x^{12}}{36}-\frac{x^8}{3}+\frac{x^{12}}{60}+o(x^{14})$$

$$f(x)=-\frac{x^{12}}{6}-\frac{x^{12}}{36}-\frac{x^{12}}{60}+\frac{x^8}{3}+o(x^{14}) = \underbrace{\frac{x^8}{3}-\frac{19}{90}x^{12}}_{\text{POLINOMIO DI GRADO}\le 14}+o(x^{14})$$

$\Rightarrow$ per unicità $P_{14,0}=\frac{x^8}{3}-\frac{19}{90}x^{12}$

• Calcolare la derivata 12° in $x=0$ di $f(x) = \sin(x^4) - (\sin(x^2))^2$

Poichè $P_{14,0}(x) = \frac{x^8}{3} - \frac{19}{90} x^{12}$

$\frac{f^{(12)}(0)}{12!}$

e $P_{14,0}(x) = \sum_{j=0}^{14} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, dovrà essere

$$\frac{f^{(12)}(0)}{12!} = -\frac{19}{90} \quad \text{cioè} \quad f^{(12)}(0) = -\frac{19}{90}(12!) =$$

$$= -\frac{19}{\cancel{9}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{5}}(1\cdot\cancel{2}\cdot 3\cdot 4\cdot\cancel{5}\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot\cancel{9}\cdot 10\cdot 11\cdot 12) = -19\cdot 12\cdot 42\cdot 80\cdot 132 =$$

$= \dots$

Esempio

Calcolare il polinomio di ordine 5 per $x \to 1$ di $f(x) = \log x$

O si calcolano le derivate o ci si riduce agli SVILUPPI notevoli per $y \to 0$ con $y = x-1$

1) si mette in risalto $\boxed{x-1 \to 0}$ per $x \to 1$

$$\log x = \log(1 + (x-1))$$

2) Sviluppo notevole di $\log(1+y)$ per $y \to 0$

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + o(y^5)$$

3) Si sostituisce $\log x = x-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} + o((x-1)^5)$

4) Per unicità $P_{5,1}(x) = x-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}$

Esempio

Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 16 in $x_0=1$ di $f(x) = \sin x$. O si trovano tutte le derivate in $x=1$, o si usano gli sviluppi notevoli per $y \to 0$, con $y = x-1$.

$$\frac{Q(x)}{\sin x - \sin 1} \quad x \to 1$$

Secondo metodo

1) si mette in evidenza la quantità $x-1$ che $\to 0$ se $x \to 1$

$$\sin x = \sin[(x-1)+1] = \sin(x-1)\cdot\cos 1 + \sin 1 \cos(x-1)$$

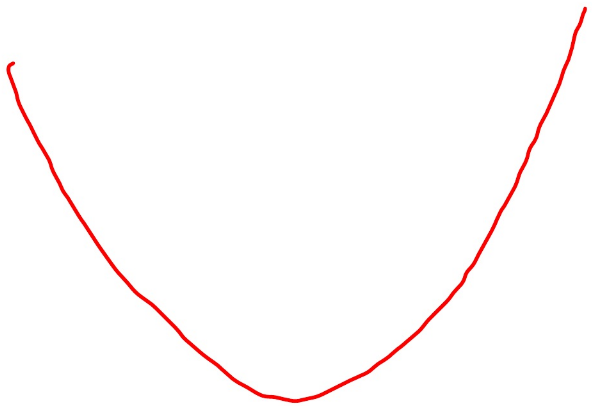
2) si usano gli sviluppi notevoli $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \dots - \frac{y^{15}}{15!} + O(y^{17})$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots + \frac{y^{16}}{16!} + O(y^{18}), \text{ per } y \to 0$$

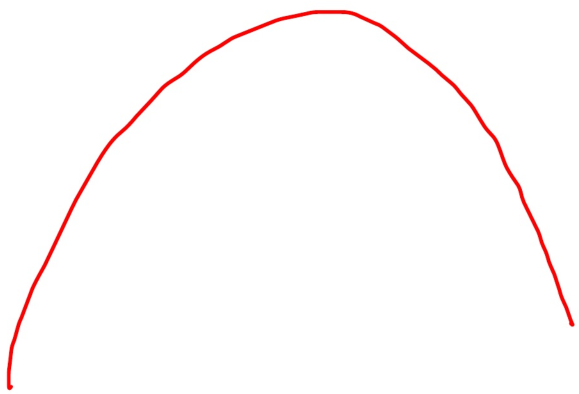
3) Si sostituisce $x-1$ ad y. 4) Per unicità

$$P_{16,1} = \left[(x-1) - \frac{(x-1)^3}{3!} + \dots - \frac{(x-1)^{15}}{15!}\right]\cos 1 + \left[1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots + \frac{(x-1)^{16}}{16!}\right]\sin 1$$

Convessità



convessa

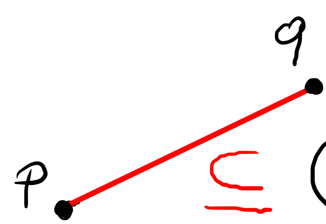


concava.

Definizione

Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \dots$)
si dice CONVESSO
se dati due suoi punti tutto il segmento da essi delimitato è contenuto in C.

$\dot{p} \in C \qquad \dot{q} \in C \quad \Longrightarrow$

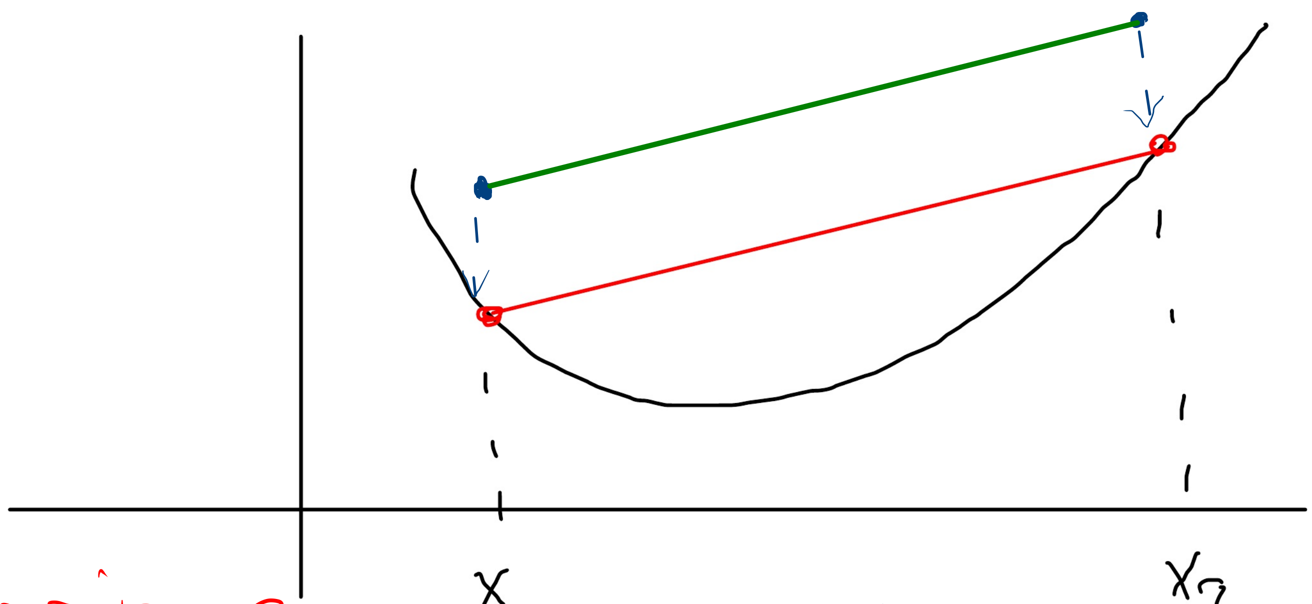


$\subseteq C$

e.g. i sottoinsiemi **convessi** di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli **intervalli**

Def: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo $f: I \to \mathbb{R}$

f si dice convessa in I se, presi due punti qualsiasi sul grafico di f, il segmento (corda) che li unisce è sopra il grafico di f.



Osservazione: ciò equivale a dire che il sopragrafico di $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \text{ e } f(x) \leq y\}$ è convesso

Osservazione:

Si dà tale definizione poiché così è semplice descrivere la corda tra $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ come grafico di una funzione

$$r : [x_1; x_2] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad r(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) + f(x_1)$$

Osservazione poiché

$$[x_1; x_2] = \{ t(x_2-x_1)+x_1 : t \in [0;1]\} = \{ tx_2+(1-t)x_1 : t\in[0;1]\}$$

e quindi se $x = t(x_2-x_1)+x_1$, si ha $r(x) = (f(x_2)-f(x_1))t + f(x_1) = tf(x_2)+(1-t)x_1$, la corda tra $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è

$$\{ (tx_2+(1-t)x_1; tf(x_2)+(1-t)f(x_1)) : t\in[0;1]\}$$

Quindi

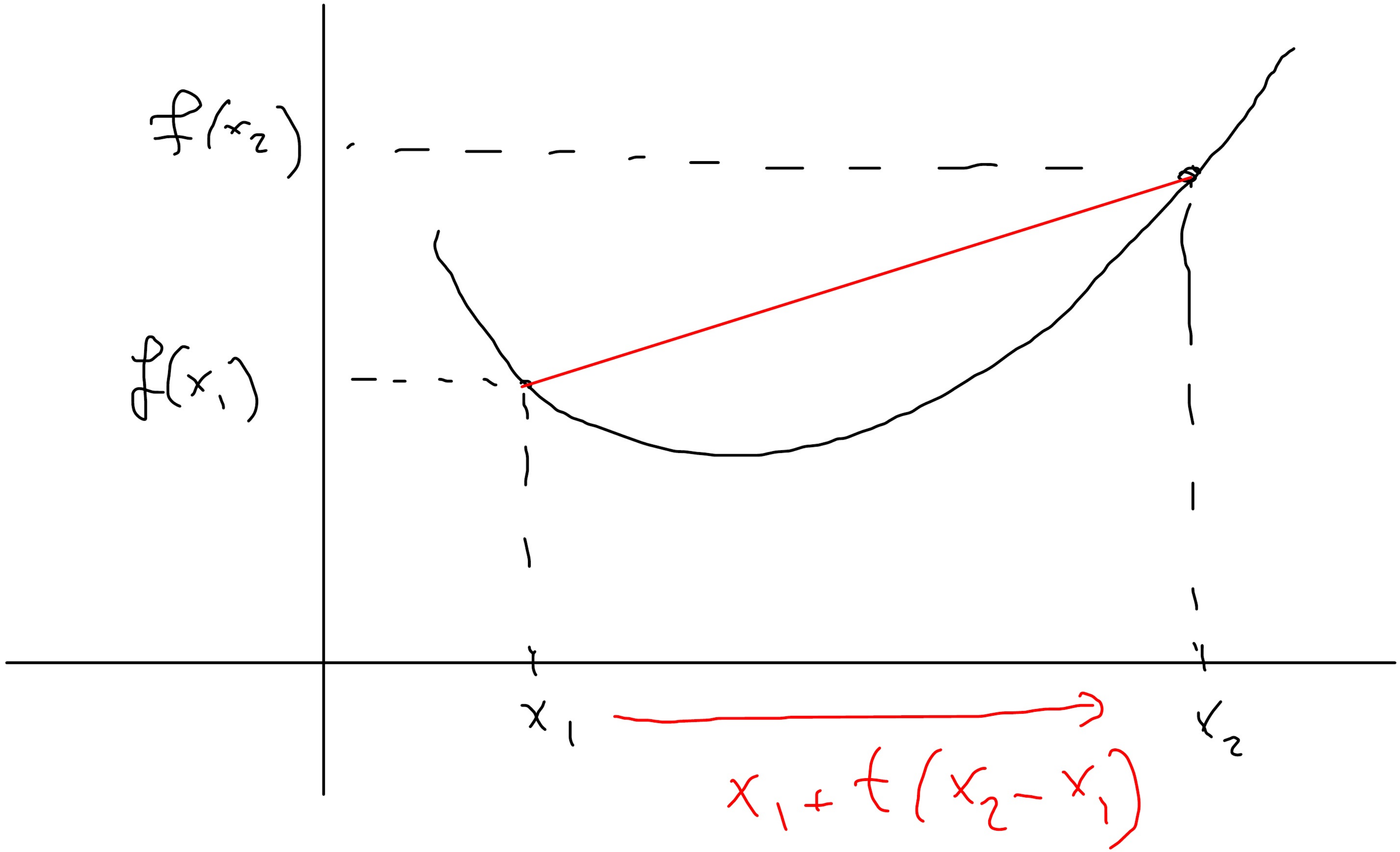
In formule

f si dice convessa in I se $\forall\, x_1, x_2 \in I$

con $x_1 < x_2$ e $\forall\, t \in (0,1)$ risulta

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t\,(f(x_2) - f(x_1))$$

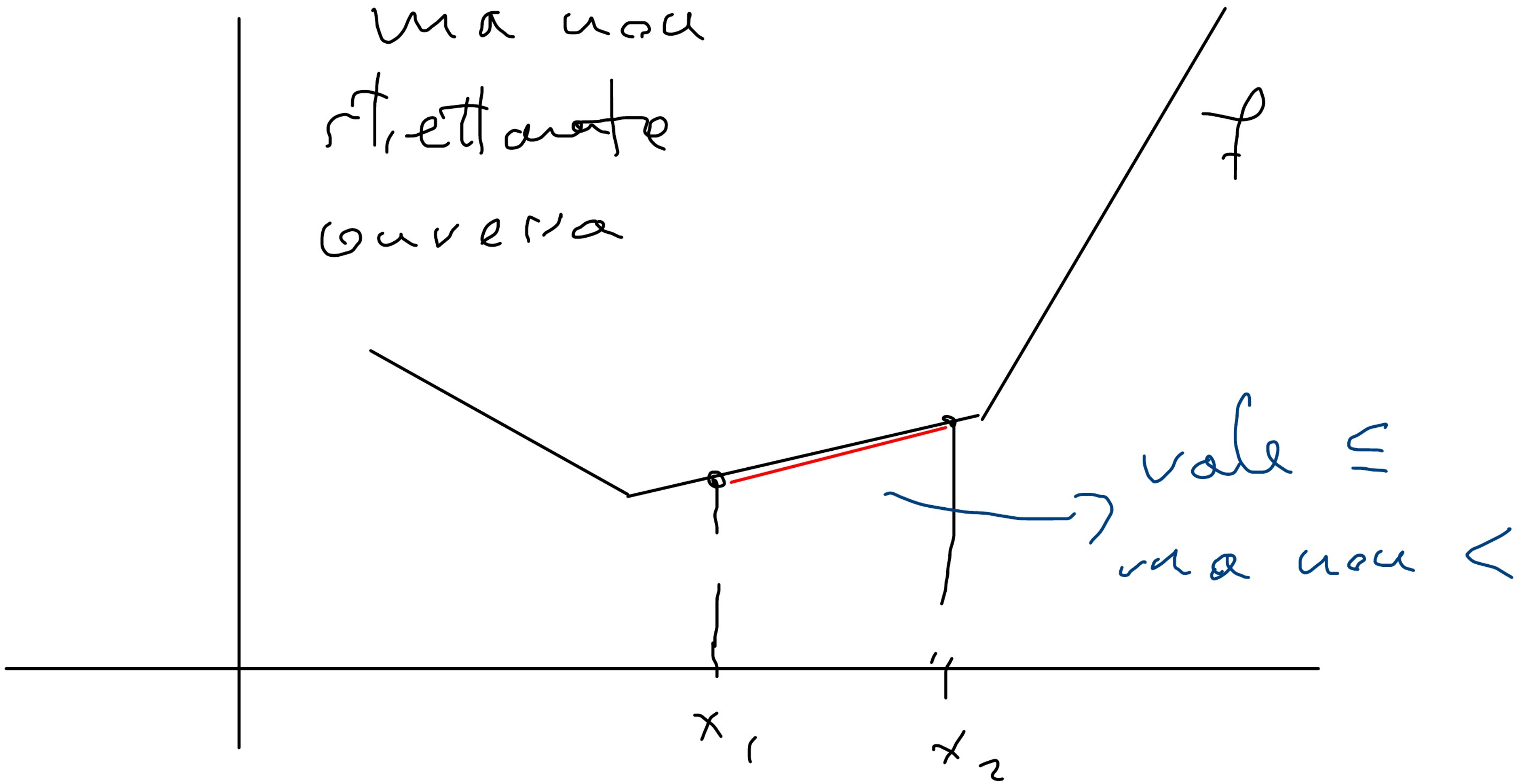
se la stessa disuguaglianza vale con $<$ (minore stretto) allora f si dice strettamente convessa.



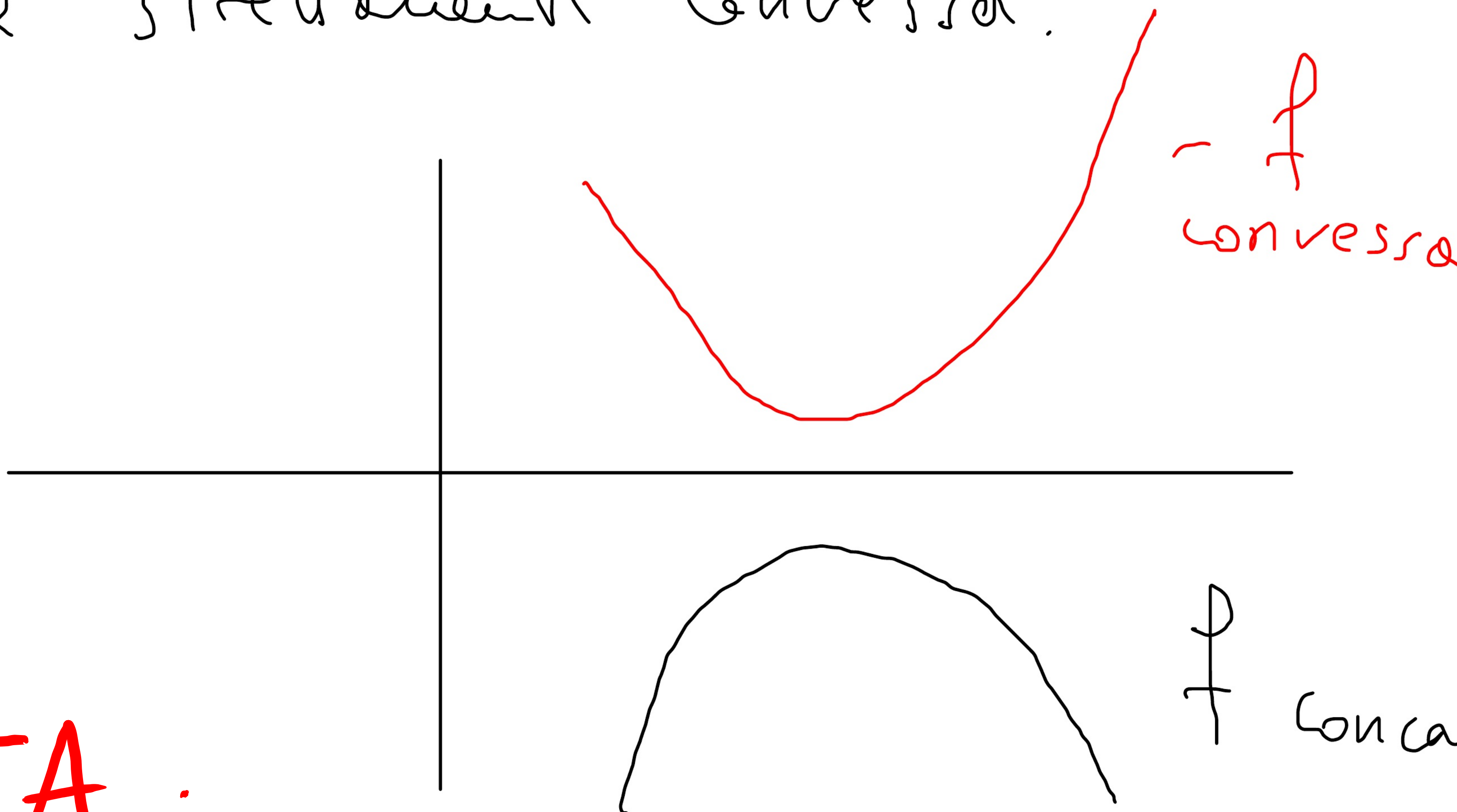
$f(x_2)$
$f(x_1)$
x_1
x_2
$x_1 + t(x_2 - x_1)$

f è convessa

ma non strettamente convessa



Def: f si dice concava se $-f$ è convessa. Strettamente concava se $-f$ è strettamente convessa.



NOTA:

NON CONVESSA NON VUOL DIRE CONCAVA

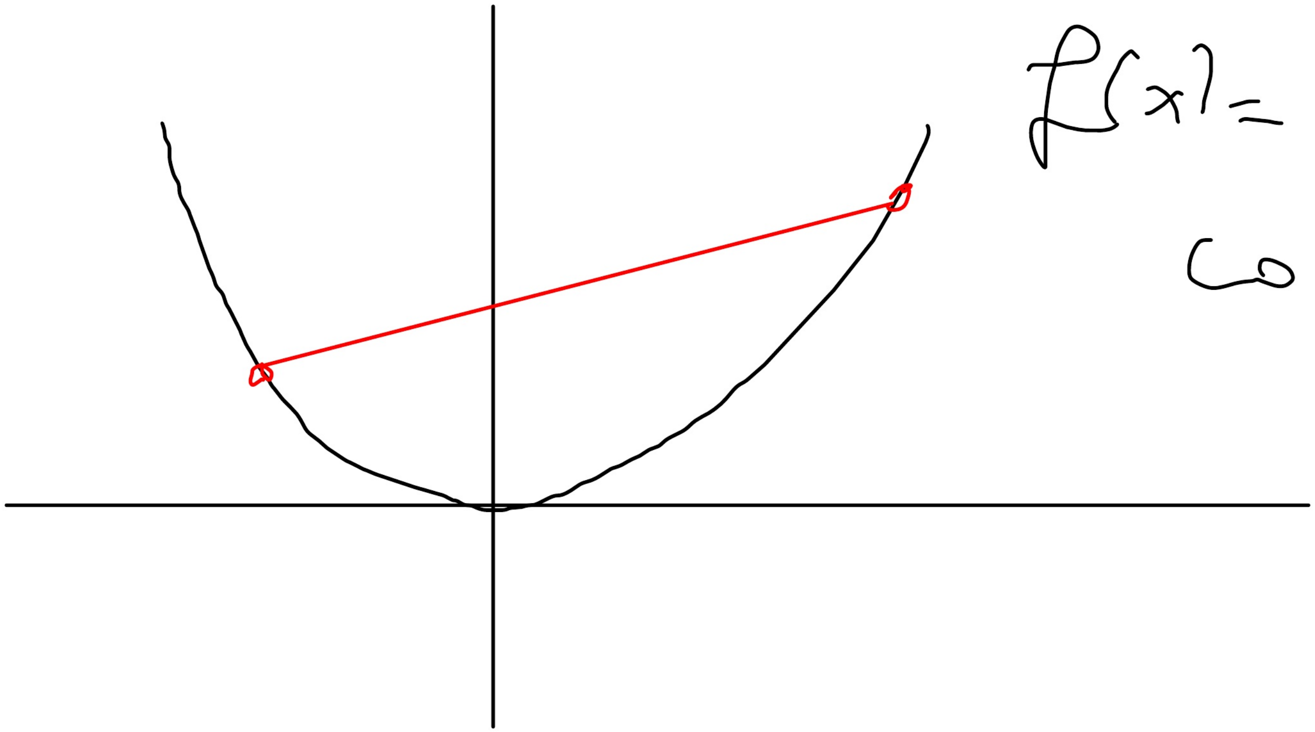
In formula per una funzione concava vale

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \geq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$

<u>Es</u>: $f(x) = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

è convessa

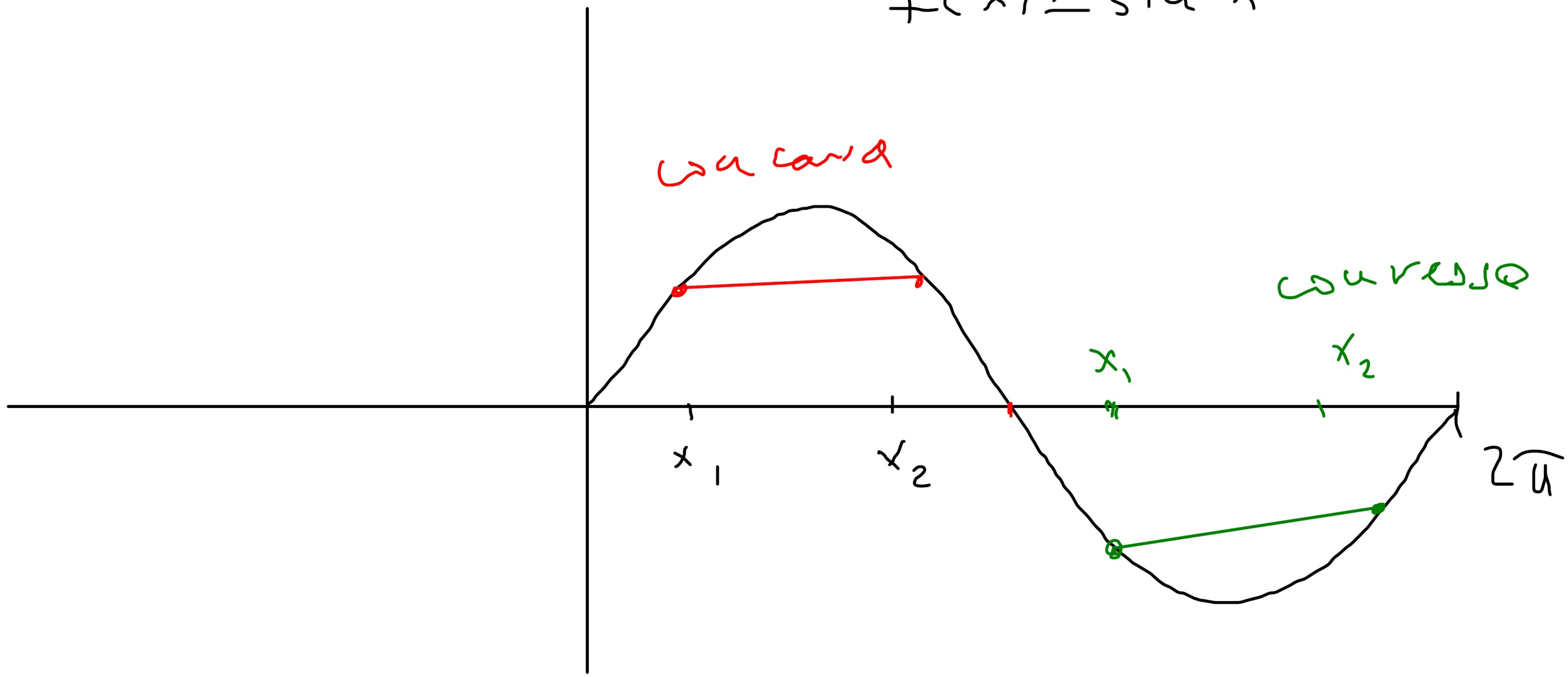
$f(x) = -x^2$ è concava.



$f(x) = x^2$

convessa

$f(x) = \sin x$



f non è né concava né convessa sull'intervallo $[0, 2\pi]$.

Proposizione

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo

1) Se f è convessa allora f è continua in $\mathrm{Int}(I)$

2) Se f è convessa e assume massimo, se ha punti di massimo interni deve esser costante

3) f è convessa se e solo se $\forall x_0 \in I$

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è crescente su $I \setminus \{x_0\}$

Proposizione

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile in I

f è convessa se e solo se il suo grafico sta sopra le sue rette tangenti.

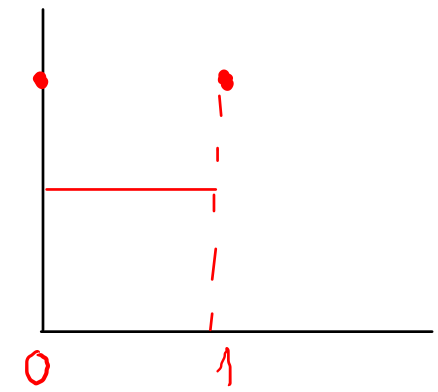
in formule $\forall x, x_0 \in I$ $\boxed{f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

i.e. $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0) \quad (x \neq x_0)$

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 2 & x=0 \text{ o } x=1 \end{cases}$$

è convessa non continua



Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte. Sono equivalenti:

1) f è convessa (strettamente convessa)
2) f' è debolmente crescente (strett. crescente)
3) $f'' \geq 0$ ($f'' > 0$)

Es: $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x$ $f''(x) = 2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\to$ f è convessa (strettamente) in $\mathbb{R}$.

Es: $f(x)=e^x$ $\quad f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x>0$

sempre $\Rightarrow f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è strettamente convessa.

Es: $f(x)=\log x$ $\quad f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f'(x)=\frac{1}{x}$ $\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ $\quad \forall x>0$

$\Rightarrow$ f è <u>strettamente concava</u>

Cosa vuol dire che f' è crescente?

Il coeff. angolare della tangente cresce

"La tangente ruota in senso antiorario"

Es: $f(x) = \sin x \qquad f: [0, 2\pi].$

$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x$

$-\sin x \geq 0 \iff \sin x \leq 0 \iff x \in [\pi, 2\pi]$

$f''(x) \geq 0 \iff x \in [\pi, 2\pi]$

$f''(x) \leq 0 \iff x \in [0, \pi]$