<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di minimo locale (o relativo) se esiste un intorno U di x_0 tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall\, x \in U \cap A.$$

Si dice punto di minimo locale stretto se

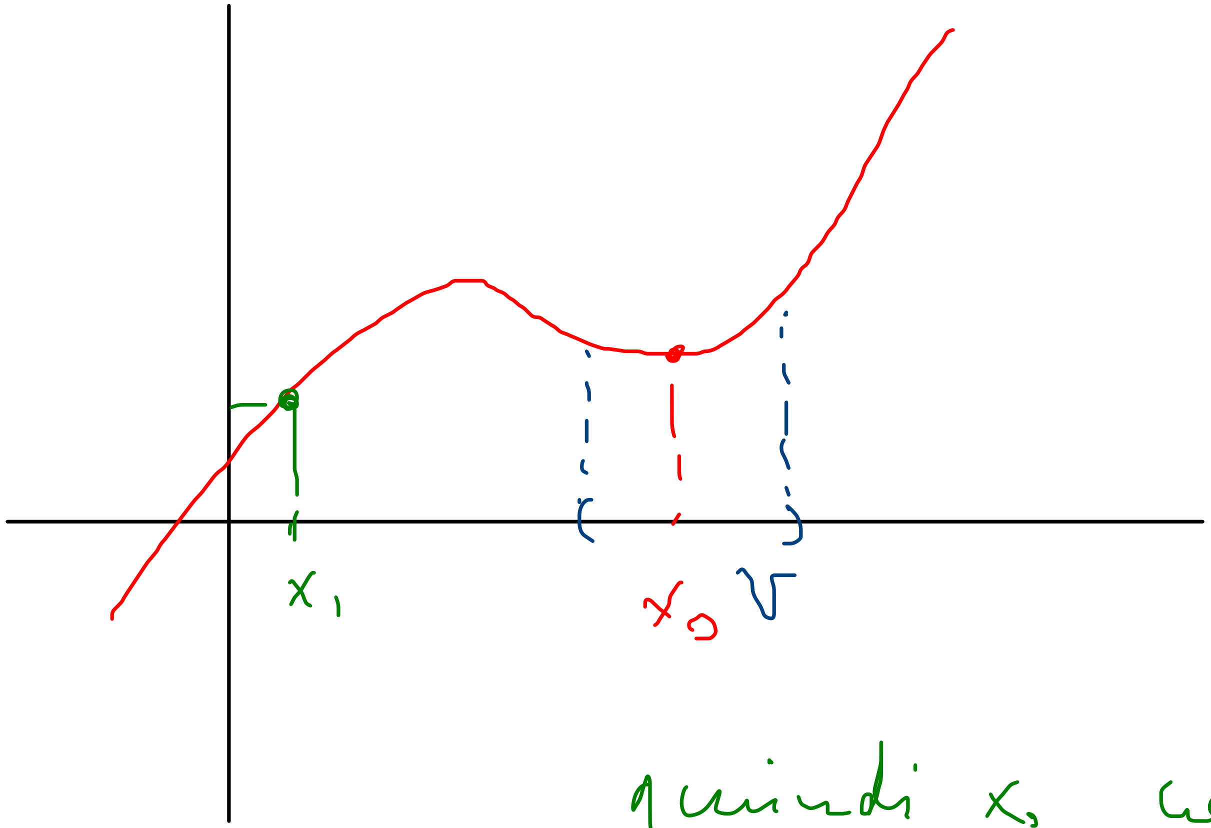
$$f(x) > f(x_0) \quad \forall\, x \in U \cap A \setminus \{x_0\}.$$

Si dice punto di massimo locale se

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in U \cap A$$

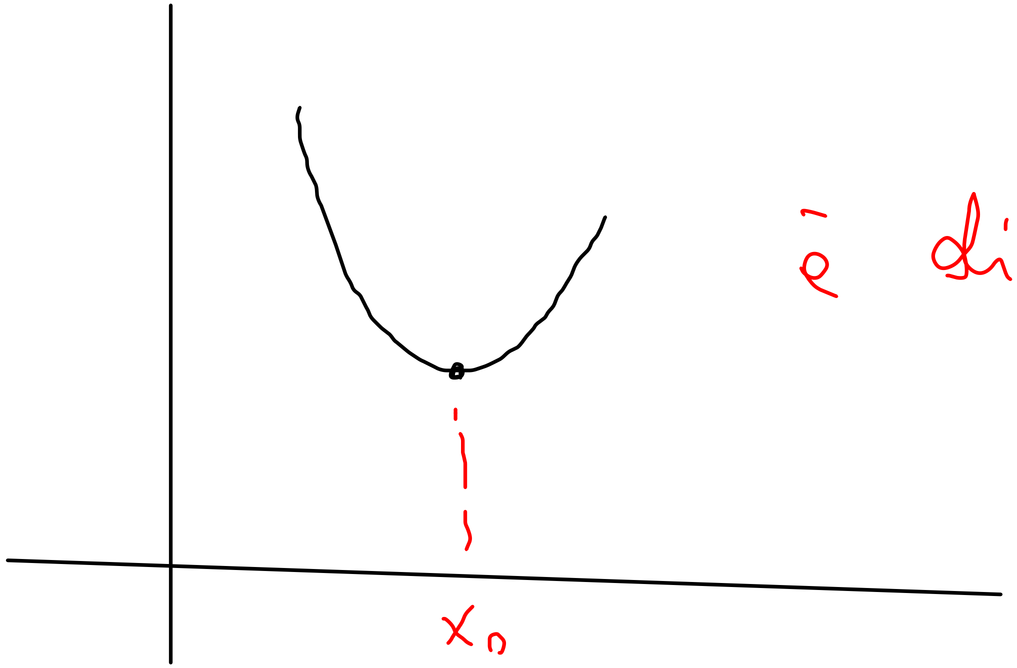
di massimo locale stretto se

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall\, x \in U \cap A \setminus \{x_0\}.$$



$f(x_1) < f(x_0)$

quindi x_0 non è punto di minimo (assoluto).

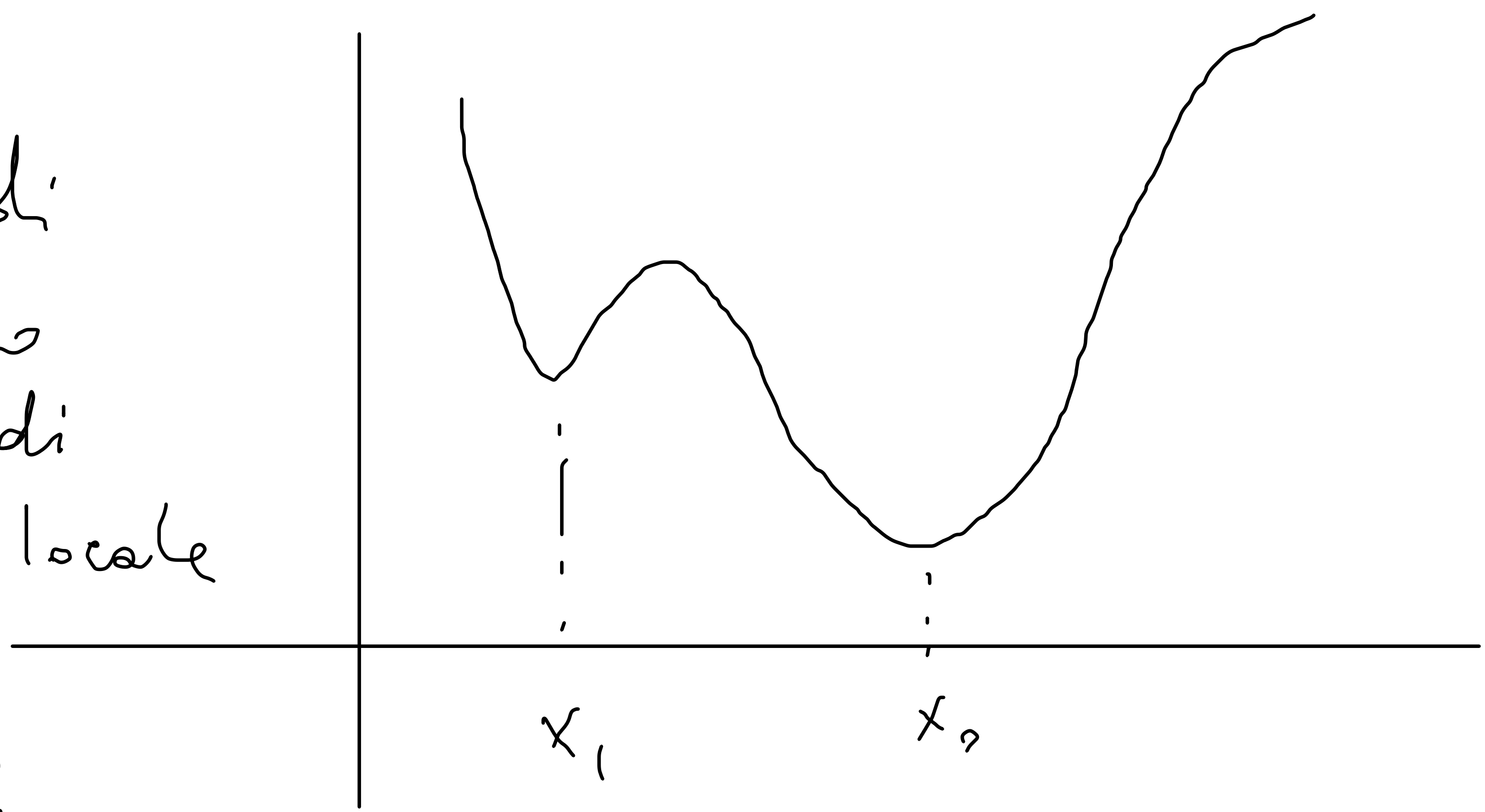


è di minimo locale stretto

è punto di minimo locale non stretto

<u>Oss</u>: Se x_0 è punto di minimo allora è anche punto di minimo locale.

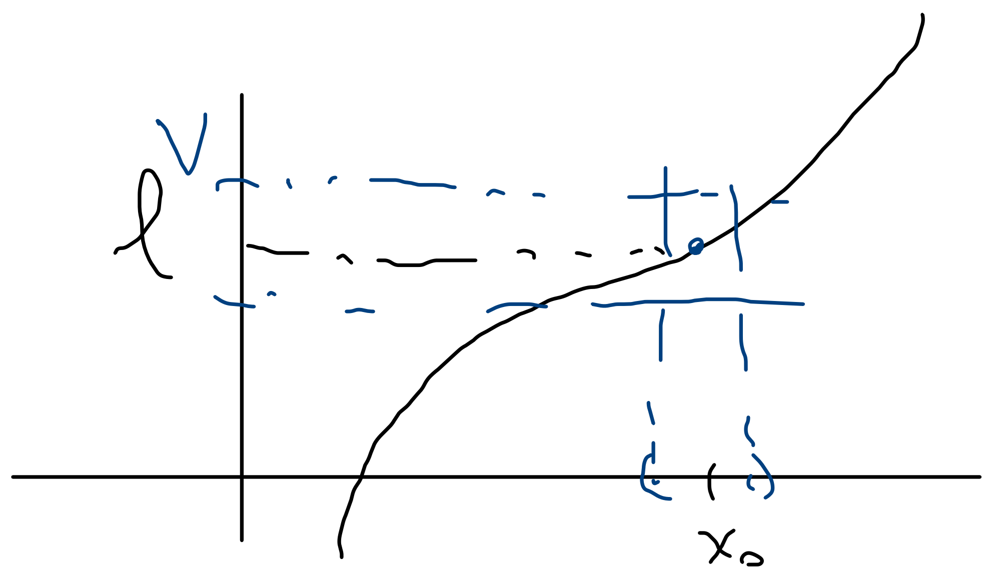
x_0 è punto di minimo e anche di minimo locale



x_1 è solo punto di minimo locale.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A. Si dice che $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ se $\forall\, V$ intorno di ℓ esiste U intorno di x_0 t.c.

$$x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V.$$



Caso $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$.

chi è un intorno U di x_0

$$U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

un intorno V di ℓ è $V = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

cosa vuol dire $x \in U$? $|x - x_0| < \delta$

$f(x) \in V \iff \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

$x \in A$, $|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0 \Rightarrow \underline{|f(x) - \ell| < \varepsilon}$

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ vuol dire che

l è il limite di $f(x)$ quando x tende a x_0.

$x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad l = +\infty$.

chi è V intorno di $+\infty$? $\quad V = (a, +\infty)$

$f(x) \in V \iff f(x) > a$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0$

t.c.

$|x - x_0| < \delta, \ x \in A, \ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > a$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$ se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in \mathbb{R}$ t.c.

$x > a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se

$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c.

$x > b \implies f(x) > a$.

---

analogamente nel caso $\ell = -\infty$ o $x_0 = -\infty$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $x_0 \in A$, $l \in \mathbb{R}$.

se e solo se

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c.

$x \in A$, $x \neq x_0$ e $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

---

f è continua in x_0 se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c.

$|x - x_0| < \delta$, $x \in A \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

<u>Oss</u>: $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $x_0 \in Acc(A)$.

Allora f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

<u>Oss</u>: Una funzione è sempre continua nei punti isolati.

Oss: Nella definizione di limite non serve che x_0 sia nel dominio della funzione, basta che sia un punto di accumulazione per il dominio.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

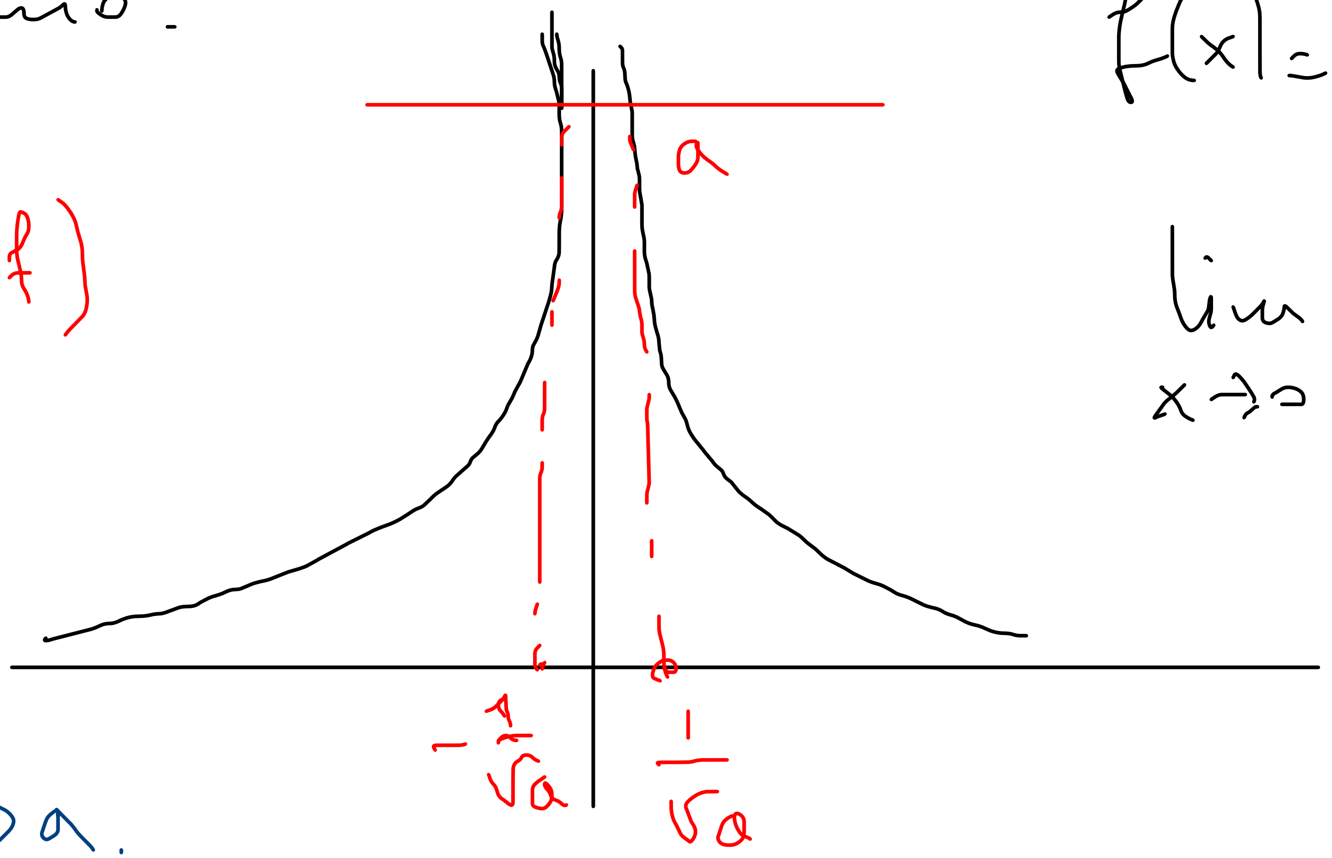
$x_0 = 0$

$x_0 \notin dom(f)$

$\delta = \frac{1}{\sqrt{a}}$

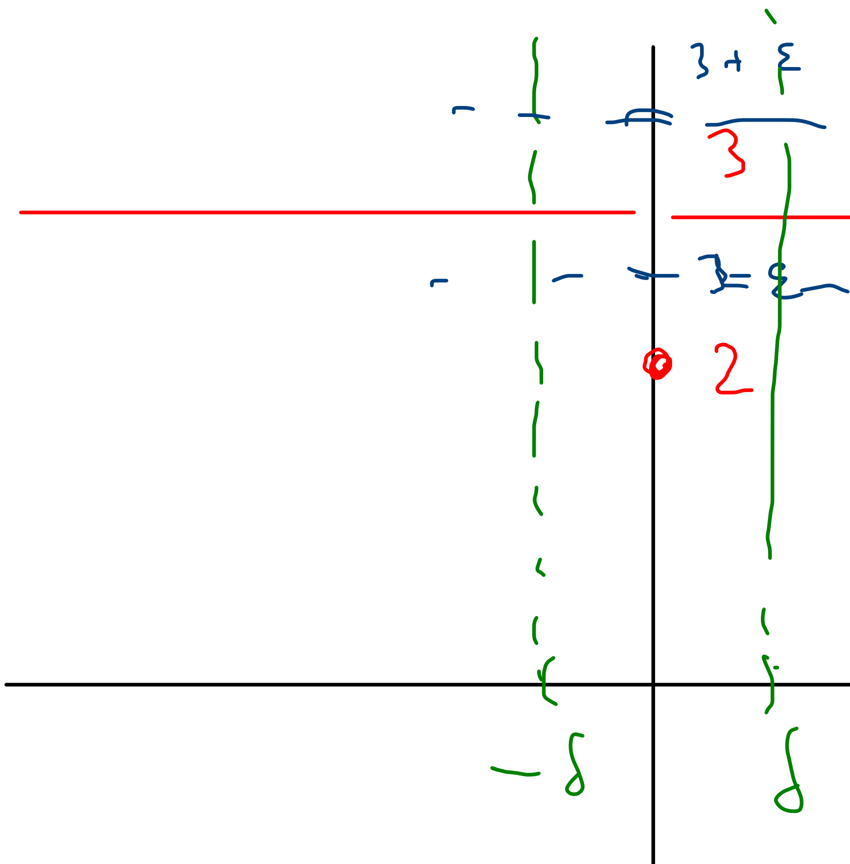
$|x - 0| < \delta$

$\Rightarrow f(x) > a.$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



non considero quanto vale la funzione in $x=0$

$|x - x_0| < \delta,\ x \in A,\ x \neq x_0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 3 \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 3 \neq 2 = f(0)$$

$\Rightarrow f$ non è continua in $x = 0$.

Unicità del limite.

Teorema: Se il limite esiste allora è unico.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (finito)

$f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 da destra e si scrive $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ se

$\forall V$ intorno di l esiste $\delta > 0$ t.c.

$$x_0 < x < x_0 + \delta,\ x \in A \Rightarrow f(x) \in V.$$

da sinistra se

$$x_0 - \delta < x < x_0,\ x \in A \Rightarrow f(x) \in V$$

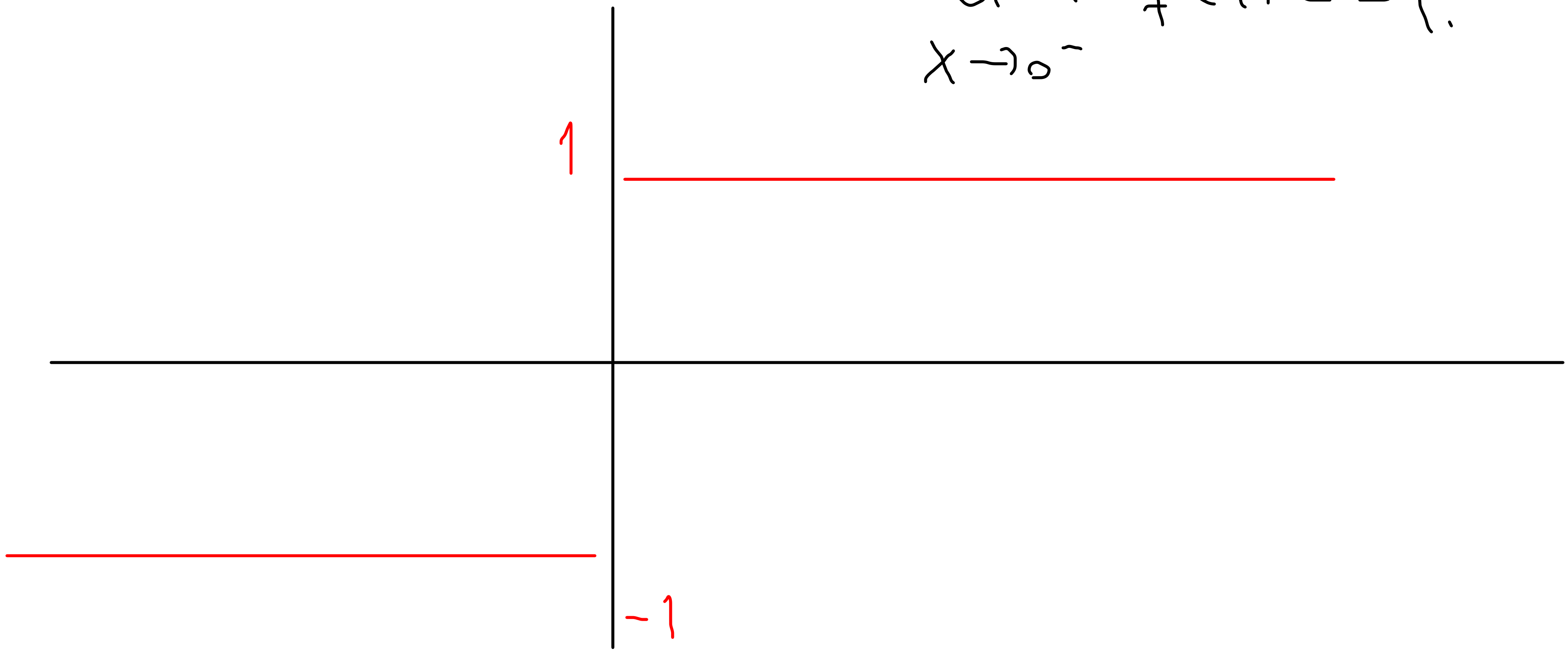
e si scrive $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

Esempio: $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$



Oss: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se e solo se

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

Nell'esempio precedente non esiste $\lim_{x \to 0} f(x)$ perché $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$.

1 $\quad$ -1

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$.

Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+ \qquad (\text{con } l \in \mathbb{R})$$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e esiste V intorno di x_0 t.c.

$$x \in V \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > l.$$

Analoga definizione per $\lim_{x \to x_0} f(x) = l^-$

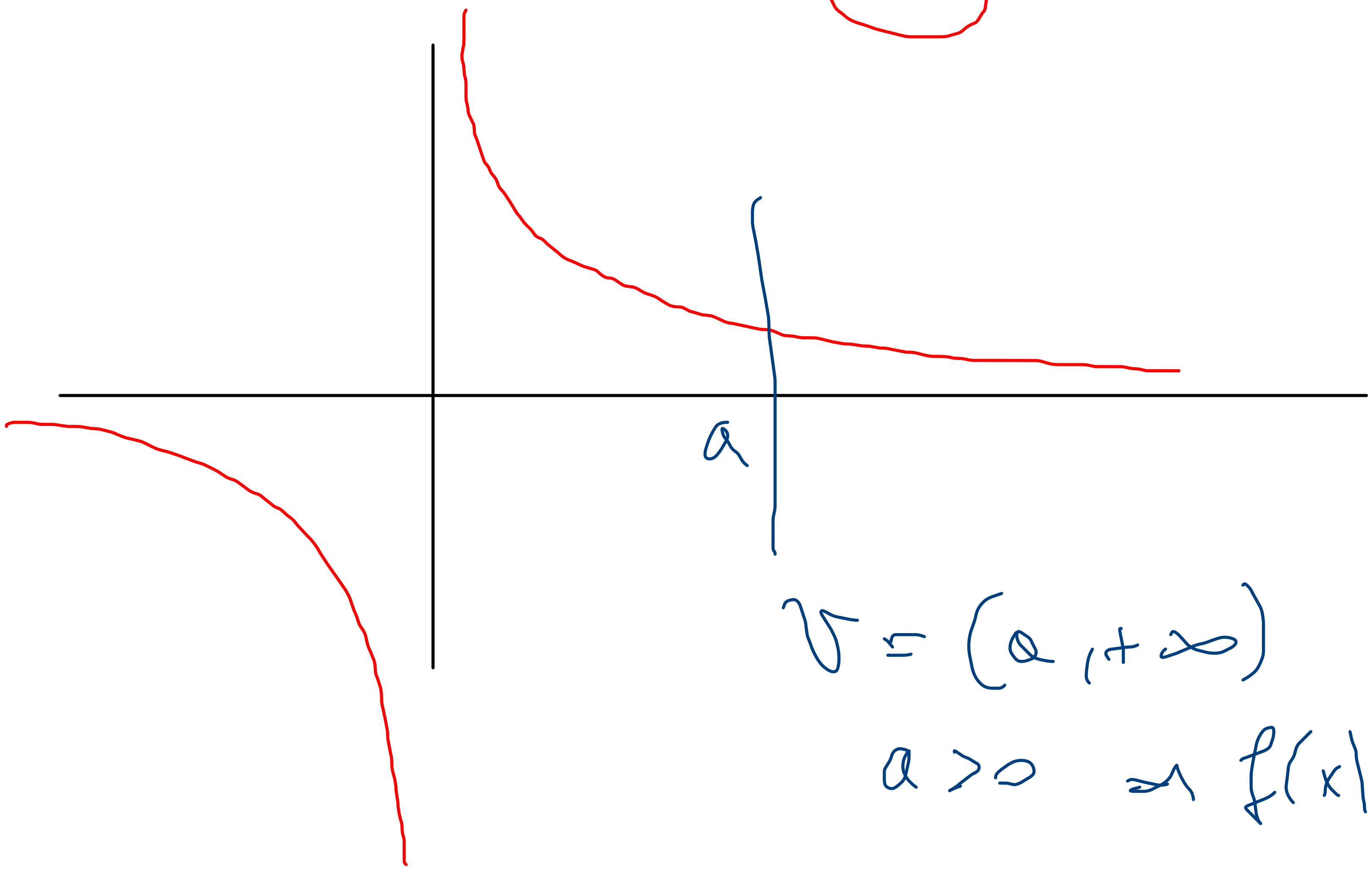
dove richiederò che

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\exists\, U$ ind. di x_0 t.c.

$x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) < \ell$

$f(x)$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell^+$

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$



$V = (a, +\infty)$

$a > 0 \Rightarrow f(x) > \boxed{0} = l.$

Teorema della permanenza del segno

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$.

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ e $l \neq 0$

allora esiste un intorno V di x_0

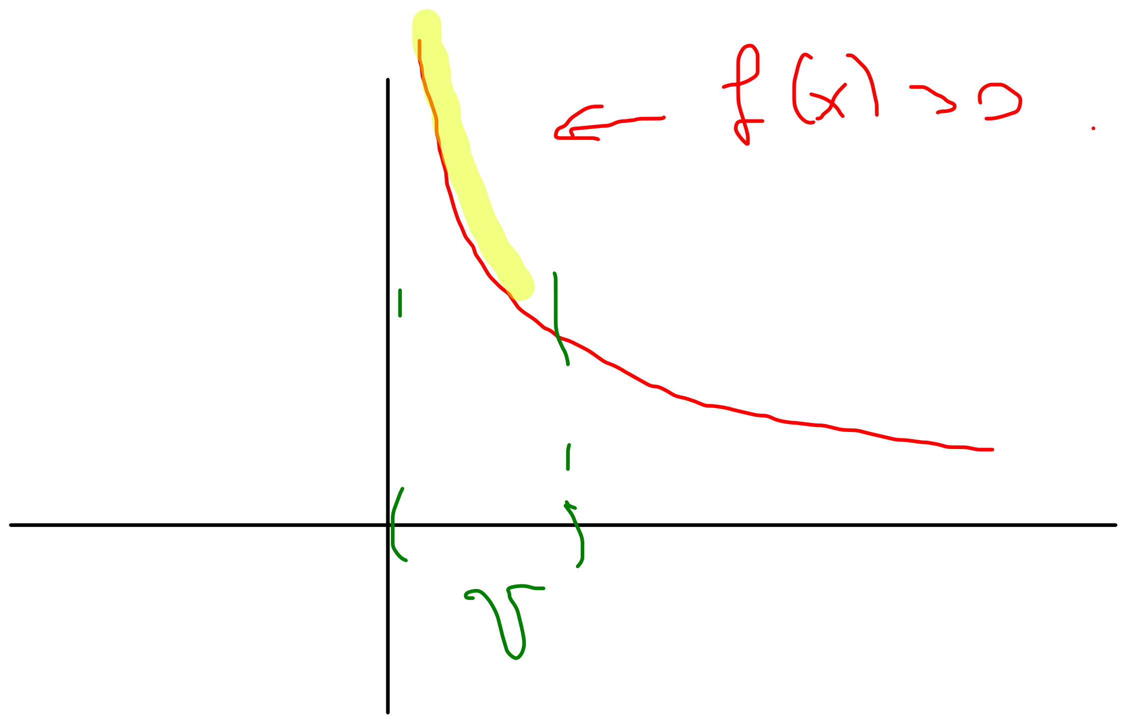
t.c. se $x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$ allora

f ha lo stesso segno di l.

Esempio: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{1}{x}$

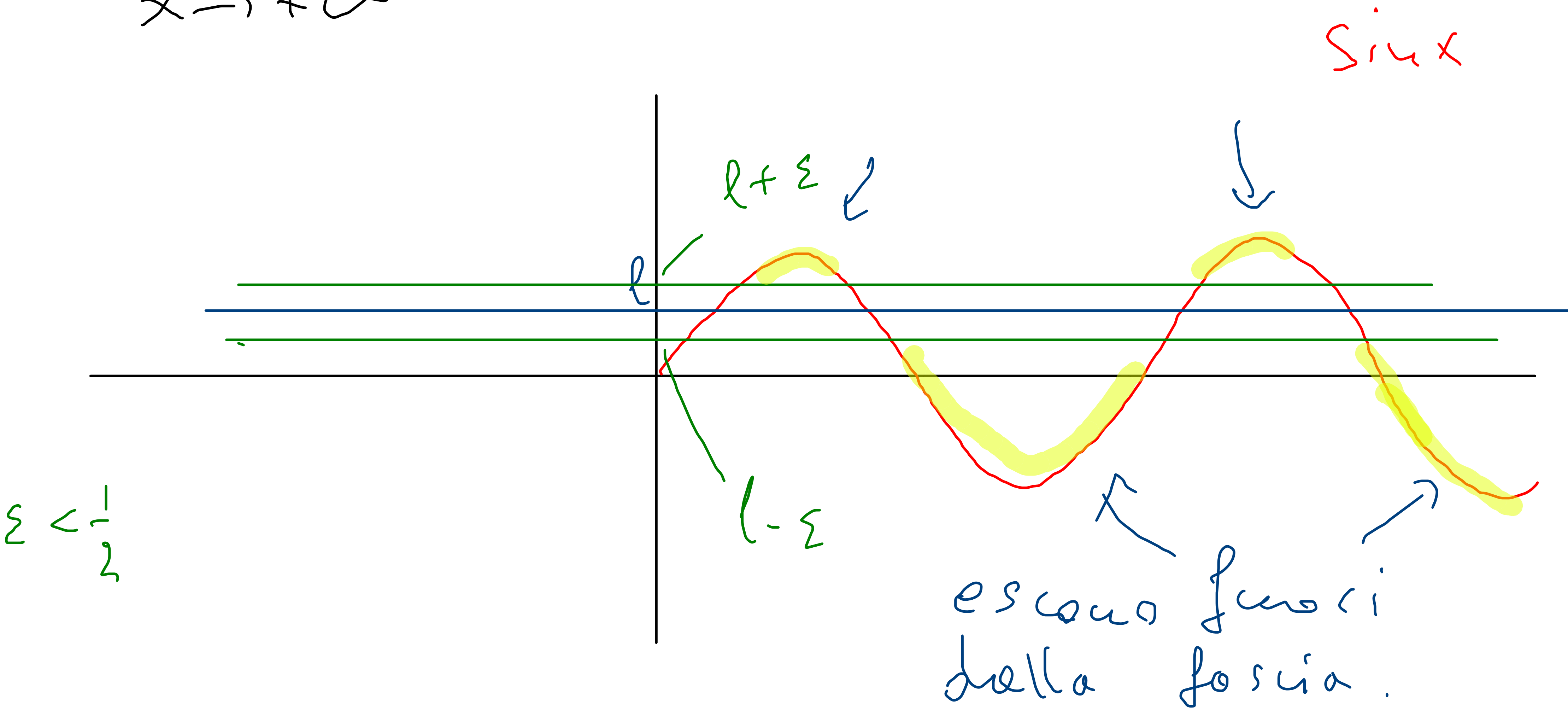
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty > 0$$

$\Rightarrow f(x)>0$ in un intorno destro di 0



Esempio: non esiste il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \sin x .$$



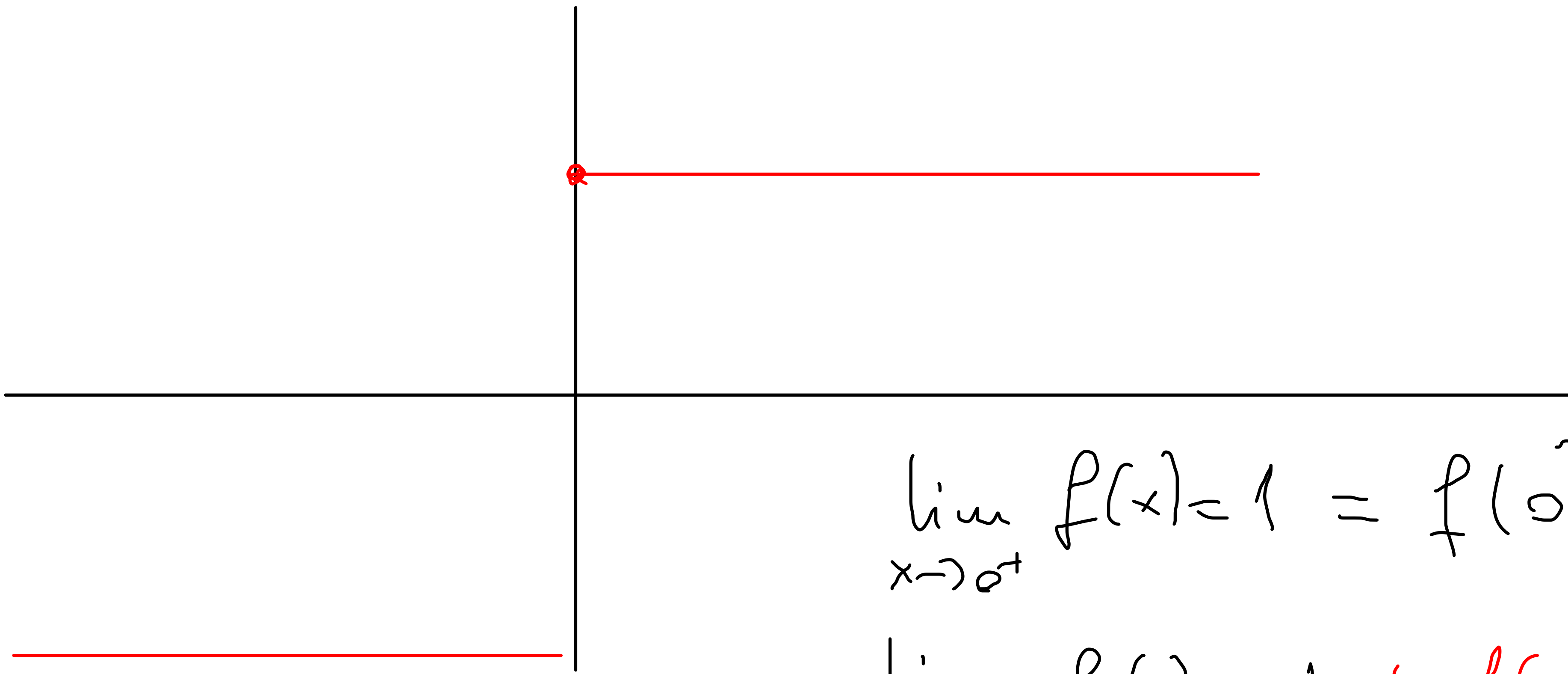
Se esistesse il limite $\ell \in \mathbb{R}$ allora scelgo $\varepsilon < \frac{1}{2}$ nella definizione di limite. Quindi dovrebbe esistere $a > 0$ tale che

$$x > a \implies \qquad \ell - \varepsilon < \sin x < \ell + \varepsilon$$

ma questo vorrebbe dire che $\sin x$ oscilla con un ampiezza minore di $2\varepsilon < 1$ mentre $\sin x$ oscilla con ampiezza 2.

Es:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq f(0).$$

Def : $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $x_0 \in Acc(A)$.

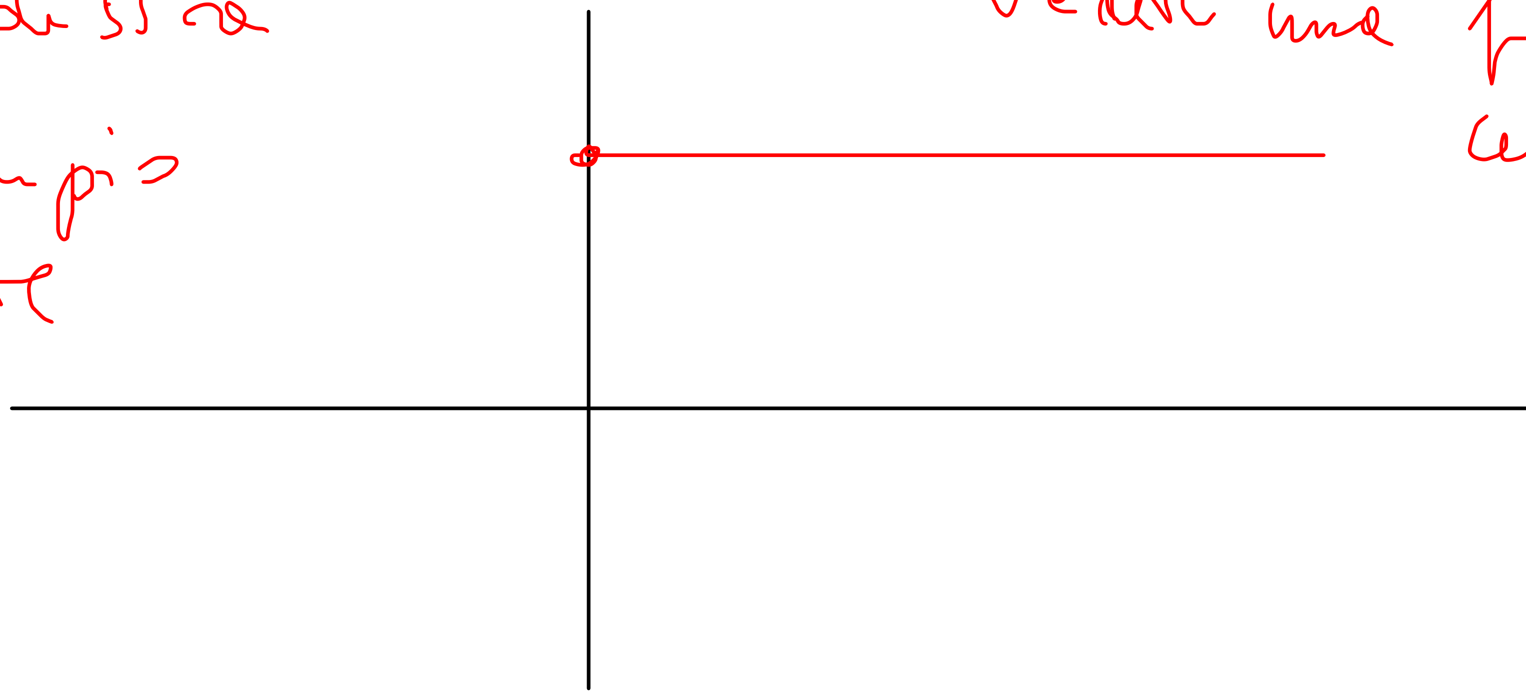
Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ allora si dice che

f è continua a destra in x_0.

Se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ si dice che

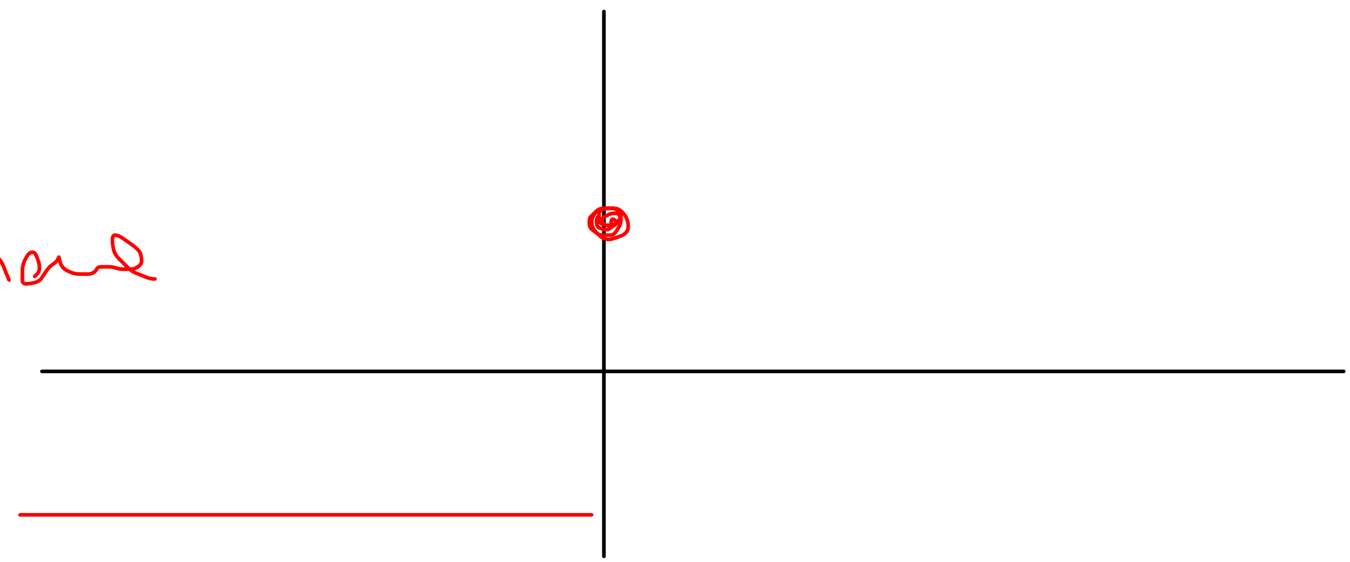
f è continua a sinistra in x_0.

metà destra dell'esempio precedente



vedete una funzione continua

metà sinistra vedo una funzione non continua in $x_0 = 0$



<u>Oss</u>: f è continua in x_0 se e solo se è continua sia a destra che a sinistra in x_0.

Teorema di confronto

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$

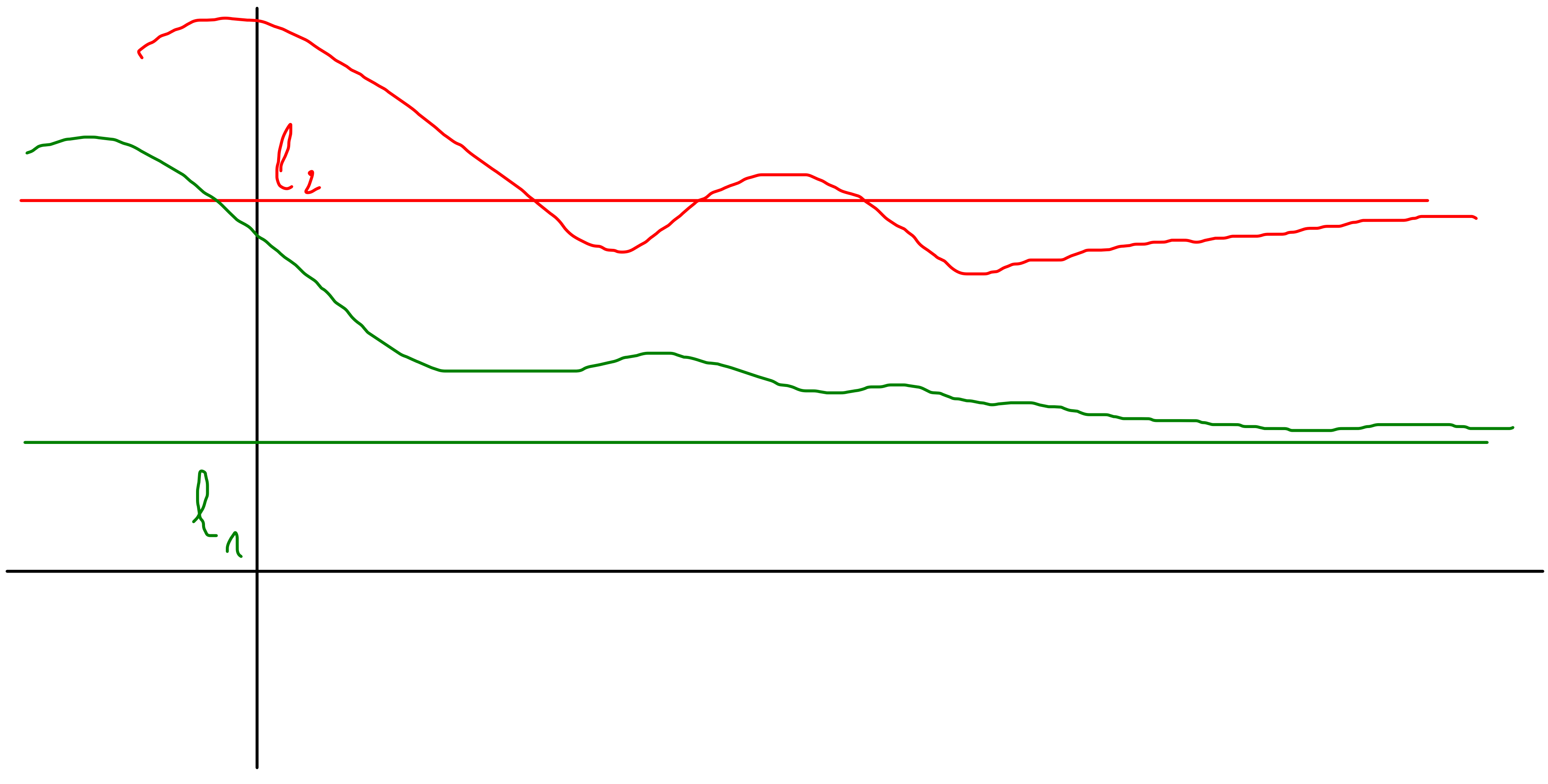
Se esistono

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad e \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

e se esiste V intorno di x_0 tale che

$$x \in V \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

allora $l_1 \leq l_2$.


ℓ_2
ℓ_1

in maniera sintetica si potrebbe dire che la disuguaglianza passa al limite

$$f(x) \leq g(x)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(nelle ipotesi corrette).

Oss: Se fosse $f(x) < g(x)$ potrei concludere

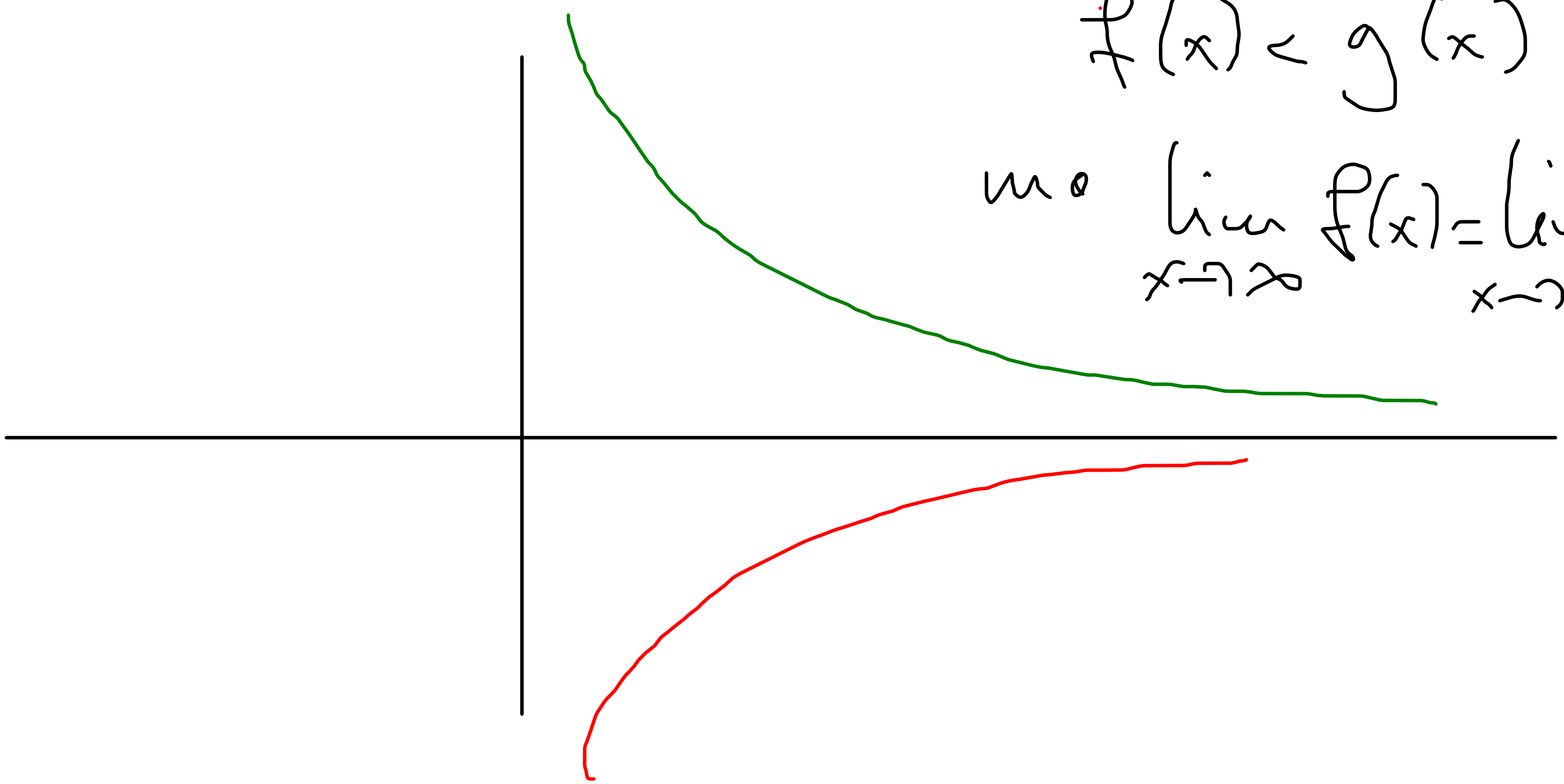
$$\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x) \,?$$

NO.

$g(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = -\frac{1}{x}$

$\boxed{x > 0}$



$f(x) < g(x)$

ma $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$

$$f(x) < g(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Le disuguaglianze passano al limite ma diventano deboli.

Teorema dei Carabinieri

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g, h : A \to \mathbb{R}$.

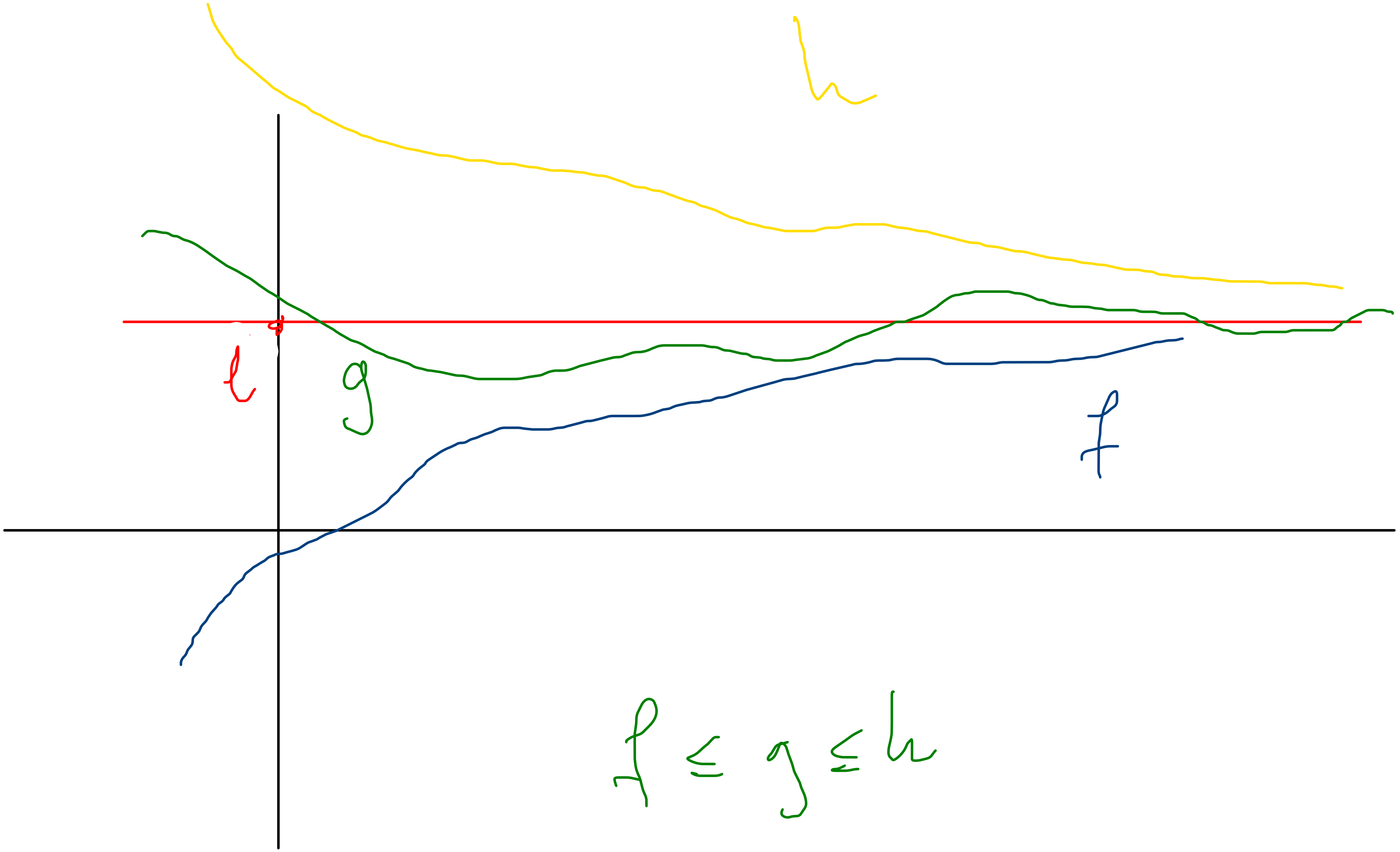
Se esistono

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ e se

esiste un intorno V di x_0 t.c.

$x \in A \cap V \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

allora esiste $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.


h
ℓ
g
f
f ≤ g ≤ h

dall'esistenza dei limiti di f e h (uguali fra loro) deduco l'esistenza del limite di g.

Es: $\lim_{x\to\infty} \frac{2+\sin x}{x}$

posso considerare $x>0$ $\left(\lim_{x\to+\infty}\right)$

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2+\sin x}{x} \leq \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2+\sin x}{x} = 0$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$

<u>Teorema</u> (somma e prodotto).

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$.

Supponiamo che esistano i limiti

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ con $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

1) Se ha senso $l_1 + l_2$ allora esiste

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = l_1 + l_2$$

2) Se ha senso $\ell_1 \cdot \ell_2$ allora esiste

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2 .$$

Sono esclusi i casi $\ell_1 = +\infty$, $\ell_2 = -\infty$ e viceversa per la somma

$(+\infty) + (-\infty) = ?$ non ha senso

e i casi $(+\infty) \cdot 0$ oppure $(-\infty) \cdot 0$ per il prodotto. Si dicono casi di indeterminazione.

Esempi di indeterminazione

Perché non ha senso $(+\infty)+(-\infty)$?

$f(x)=2x \qquad g(x)=-x$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty.$

$$\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x-x)=\lim_{x\to\infty} x=+\infty.$$

Allora in questo caso avrei che

$$(+\infty)+(-\infty)=+\infty.$$

Invece se prendo

$f(x) = \frac{x}{2}$ $\qquad g(x) = -x$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{2} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{x}{2}\right) = -\infty$

e in questo caso avrei

$(+\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Quale delle due scelgo?

Per questo motivo dico che

$(+\infty)+(-\infty)$ non ha senso.

Allo stesso modo per il prodotto

$0 \cdot (+\infty)$

esempi: $f(x) = \frac{1}{x} \to 0$ $\quad g(x) = x \to +\infty$

per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot x \right) = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

e in questo caso avrei $(0) \cdot (+\infty) = 1$

Se invece prendo $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = x^2$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot x^2 \right) = \lim_{x \to \infty} x = +\infty$

e in questo caso avrei

$0 \cdot (+\infty) = +\infty$.

Non so cosa scegliere.

Dirò quindi $0 \cdot (+\infty)$ non ha senso.

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f : A \to \mathbb{R}$.

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $l \in \mathbb{R}$

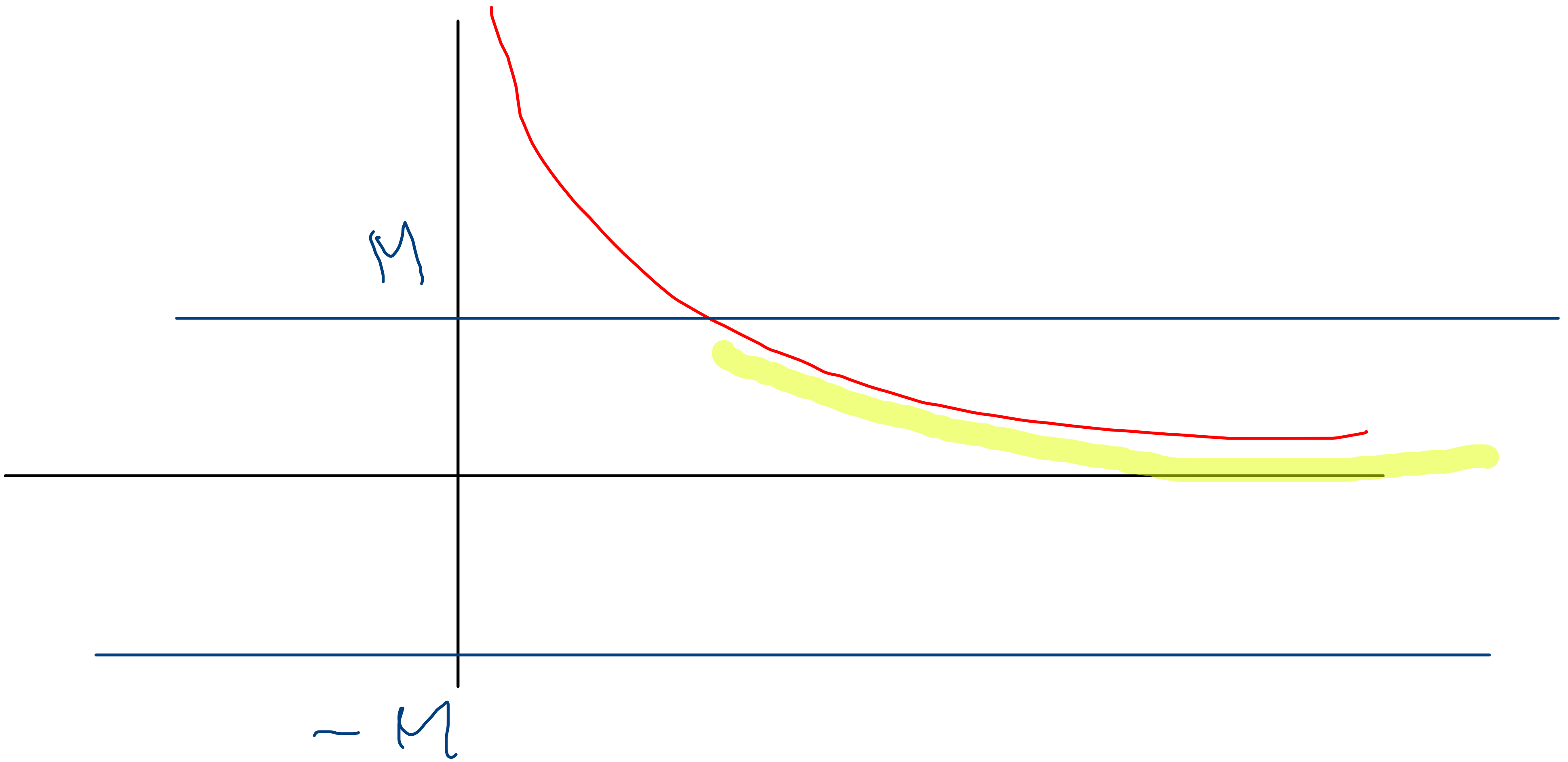
(cioè l non è $\pm\infty$). allora f è

limitata in un intorno di x_0 cioè

$\exists\ V$ intorno di x_0 e $\exists\ M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ t.c.

$$x \in V \cap A \Rightarrow |f(x)| \le M.$$

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ è limitata in un intorno di $+\infty$ perché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$



Def: Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ allora si dice che f è infinitesima per x che tende a x_0

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si dice che f diverge positivamente per x che tende a x_0

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si dice che f diverge negativamente.

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$ (finito)

si dice che f converge a l per x che tende a x_0.

Prop.: Se f è limitata inferiormente in un intorno di x_0 e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty .$$

Se f è limitata superiormente in un intorno di x_0 e $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = -\infty$$

Se f è limitata in un intorno di x_0

e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ allora

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0 .$$

Sono tutte conseguenze del teorema dei Carabinieri.

<u>Es</u>: $\lim_{x \to +\infty} x + \sin x$

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \sin x$ non esiste

non posso applicare il teorema del limite della somma.

Però $\sin x$ è limitato inferiormente

allora

$$\lim_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty .$$

$$\underbrace{x - 1}_{\downarrow\, +\infty} \le x + \sin x \le \dots$$

perchè $\sin x$ è limitata inferiormente

$\Rightarrow$ $+\infty$.

per il teorema dei Carabinieri.