(non isolato)

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di minimo locale (o relativo) se esiste un intorno U di x_0 tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall\, x \in U \cap A.$$

Si dice punto di minimo locale stretto se

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall\, x \in U \cap A \setminus \{x_0\}.$$

Si dice punto di massimo locale se

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in U \cap A$$

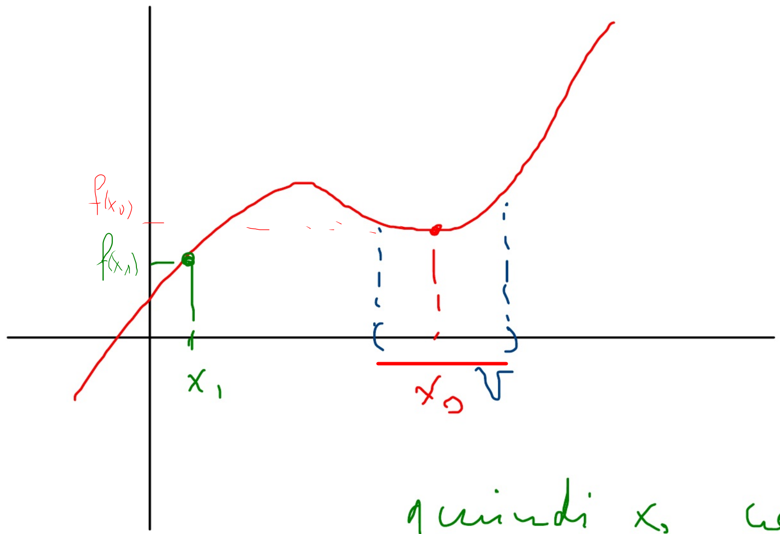
di massimo locale stretto se

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall\, x \in U \cap A \setminus \{x_0\}.$$

Osservazione: tale definizione non avrebbe molto senso se $x_0 \in A$ fosse isolato per A: tutti i punti isolati per A sarebbero sia di massimo locale che di minimo locale per $f: A \to \mathbb{R}$!

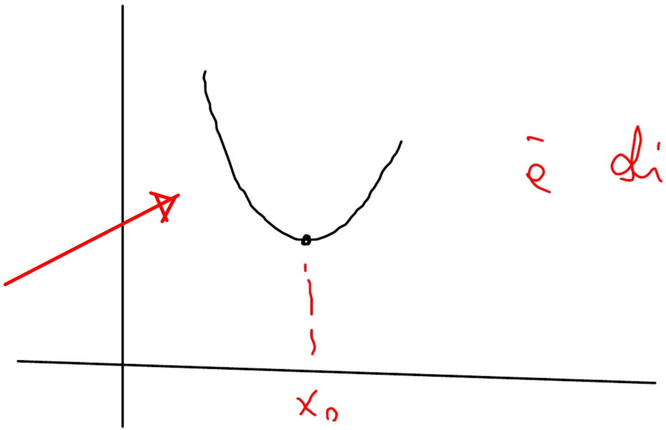
Osservazione: quindi questa non è la nozione corretta per le successioni $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ il cui dominio è tutto di punti isolati.

in un punto



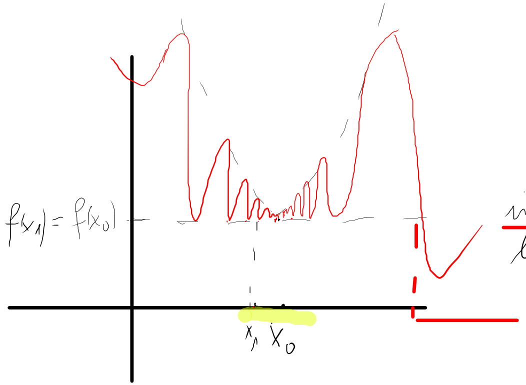
$f(x_1) < f(x_0)$

quindi x_0 non è punto di minimo (assoluto).



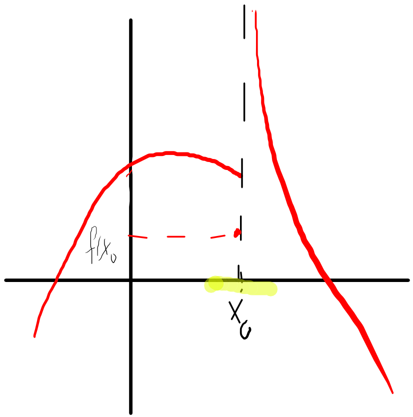
è di minimo locale stretto

è punto di minimo locale non stretto



x_0 è punto di minimo locale (non stretto)

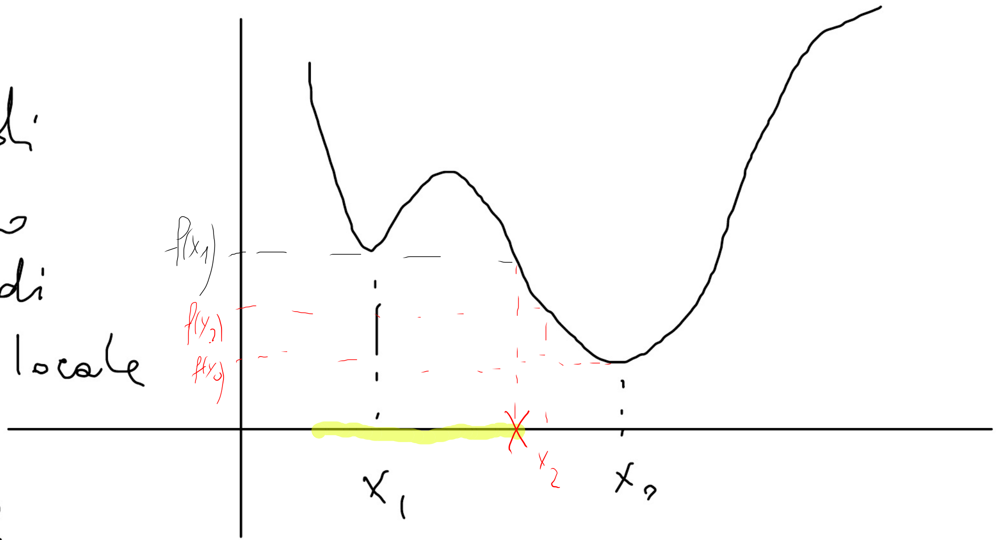
infinite oscillazioni tra la retta $y=f(x_0)$



x_0 è punto di min. locale stretto

Oss: Se x_0 è punto di minimo allora è anche punto di minimo locale.

x_0 è punto di minimo è anche di minimo locale



x_1 è solo punto di minimo locale.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A. Si dice che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ se $\forall\, V$ intorno di l esiste U intorno di x_0 t.c.

$l = +\infty$
$l = -\infty$

$$x \in U \cap \boxed{A \setminus \{x_0\}} \Rightarrow f(x) \in V.$$

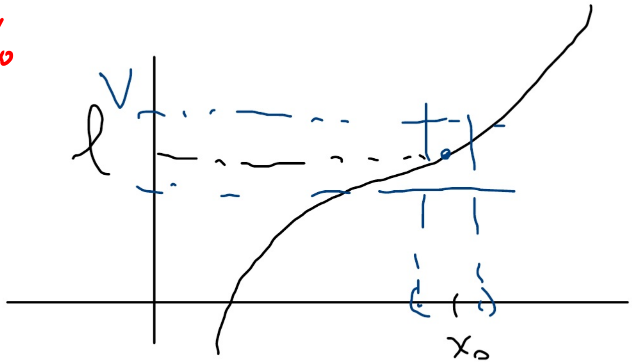
$x \neq x_0$

non entra in gioco il valore $f(x_0)$!

NOTAZIONI

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$$



Caso $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$.

chi è un intorno U di x_0

$$U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

un intorno V di l è $V = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

cosa vuol dire $x \in U$? $0 < |x - x_0| < \delta$

$$f(x) \in V \iff l\ \cancel{f(x_0)} - \varepsilon < f(x) < \cancel{f(x_0)}\ l + \varepsilon.$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ se e solo se

$\underline{\forall \varepsilon > 0}$ $\underline{\exists \delta > 0}$ t.c.

$x \in A$, $|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0$ * $\Rightarrow$ $\underline{|f(x) - \cancel{f(x_0)}\ l| < \varepsilon}$

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $x \neq x_0$ * $\cancel{f(x_0)}\ l - \varepsilon < f(x) < \cancel{f(x_0)}\ l + \varepsilon$

cioè $0 \overset{*}{<} |x - x_0| < \delta$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ vuol dire che

l è il limite di $f(x)$ quando x tende a x_0.

$x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad l = +\infty$.

chi è V intorno di $+\infty$? $\quad V = (a, +\infty)$

$f(x) \in V \iff f(x) > a$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se $\underline{\forall a \in \mathbb{R}}$ $\exists \delta > 0$

t.c.

$|x - x_0| < \delta$, $x \in A$, $\underline{x \neq x_0} \Rightarrow \underline{f(x) > a}$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$ se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in \mathbb{R}$ t.c. $\qquad x_0 = +\infty$

$x > a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se

$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R}$ t.c.

$x > b \implies f(x) > a.$

---

analogamente nel caso $\ell = -\infty$ o $x_0 = -\infty$.

Osservazione: un caso particolare di limite quando $x_0 = +\infty$ è quello di successioni

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad +\infty \in Acc(\mathbb{N}) \quad +\infty \notin \mathbb{N}$$

$[n_0, +\infty) \cap \mathbb{N}$

$$l = \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

Per esempio se $l \in \mathbb{R}$

$\forall V$ intorno di l $\exists U$ intorno di $+\infty$ t.c. $x \in \mathbb{N} \cap U \Rightarrow a_x \in V$

diventa

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| \leq \varepsilon$$

Esempi: 1) $a_n = n$ $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, infatti (cfr. commenti alle lezione 3 pag. 17)

$\mathbb{N}$ è illimitato superiormente: $\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ $n_0 \geq x_0$, quindi

$\forall x_0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \ n = a_n \geq x_0$

2) $a_n = \frac{1}{n}$ $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, infatti (cfr. ibidem) $\inf\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\ n \geq 1\right\} = 0$

per caratterizzazione di estremo inferiore $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \frac{1}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon$, quindi

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon\ \ \frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

3) Per $0 \leq |x| < 1$ (cfr. Es 4 esercizi a risposta aperta sec. settimana) $a_n = x^n$

$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon\ \ |x^n| = |x|^n \leq \varepsilon$.

4) Di conseguenza se $x > 1$ $\exists \lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$ Esercizio: $x \leq -1 \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} x^n$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{con} \quad x_0 \in A \ , \ \ell \in \mathbb{R}.$$

se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad$ t.c.

$$x \in A, \ \underbrace{x \neq x_0} \ \text{e} \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

f è continua in $x_0 \in A$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta > 0$ t.c.

$$|x - x_0| < \delta, \ x \in A \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\forall V$ di $f(x_0)$

$\exists U$ di x_0 t.c.

$$x \in U, \ x \in A \Rightarrow f(x) \in V$$

Oss: $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $x_0 \in Acc(A)$.

Allora f è continua in x_0 se e solo se

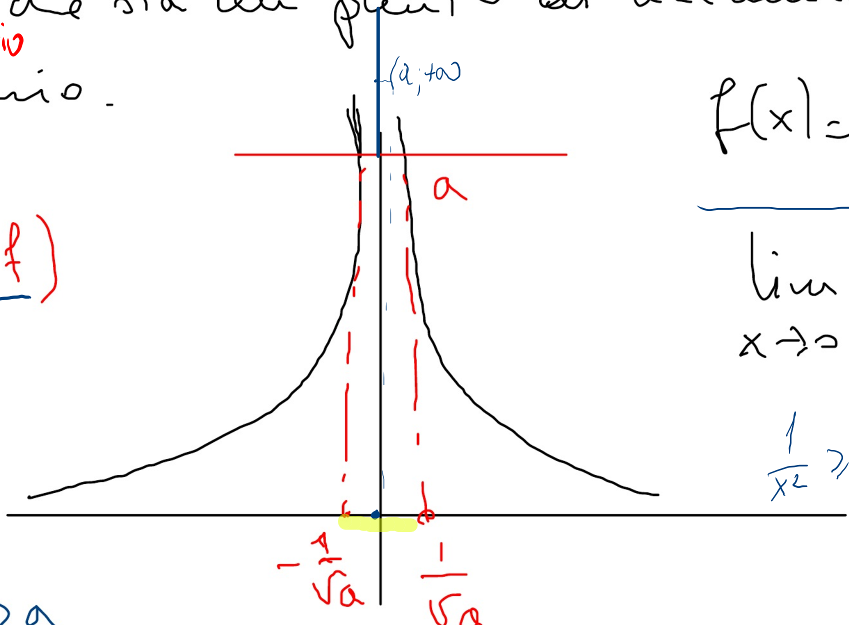
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \cancel{\ell}\, f(x_0) \qquad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$$

Oss: Una funzione è sempre continua nei punti isolati.

qualunque $\varepsilon > 0$ si dia, si sceglie $\delta \leq \inf\{|x - x_0| : x \in A, x \neq x_0\}$

per cui $\underline{|x - x_0| < \delta} \Rightarrow \underline{\underline{x = x_0}} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = f(x_0)}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{= 0} < \varepsilon$

Oss: Nella definizione di limite non serve che x_0 sia nel dominio della funzione, ~~basta~~ è necessario che sia un punto di accumulazione per il dominio.



$x_0 = 0$

$x_0 \notin dom(f)$

$\delta = \frac{1}{\sqrt{a}}$

$|x-0| < \delta$

$\Rightarrow f(x) > a.$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

$a > 0$

$\frac{1}{x^2} \geq a \qquad \frac{1}{a} \geq x^2$

$\frac{1}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{x^2} = |x|$

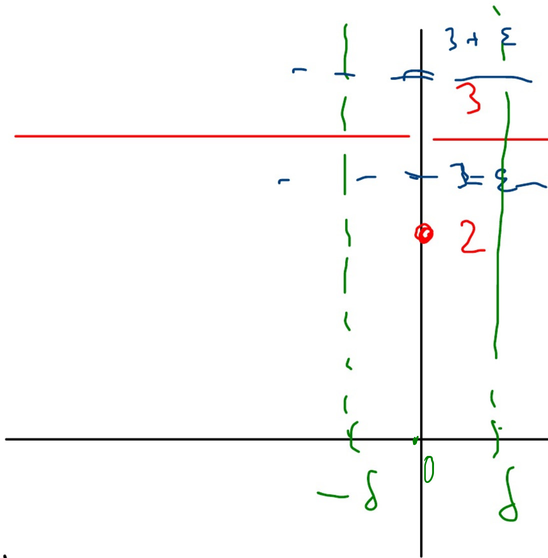
$-\frac{1}{\sqrt{a}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$

$f(x_0) = 2$



non considero quanto vale la funzione in $x=0$

$|x - x_0| < \delta,\ x \in A,\ x \neq x_0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 3$$

$$\Rightarrow |\underset{\substack{\shortparallel \\ 3}}{f(x)} - \underset{\substack{\shortparallel \\ 3}}{\ell}| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3 \neq 2 = f(0)$$

$\Rightarrow f$ non è continua in $x=0$.

Unicità del limite.

Teorema: Se il limite esiste allora è unico.

Dim. Si usa: 1) $l_1 \neq l_2$, $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ $\exists V_1$ di l_1, $\exists V_2$ di l_2 e $\underline{V_1 \cap V_2 = \emptyset}$

2) U_1 di x_0, U_2 di x_0 $\Rightarrow (U_1 \setminus \{x_0\}) \cap (U_2 \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Se $f \xrightarrow[x_0]{} l_1$ e $f \xrightarrow[x_0]{} l_2$

$\exists U_1\ \forall x \in U_1 \setminus \{x_0\}$ $\quad f(x) \in V_1$

$\exists U_2\ \forall x \in U_2 \setminus \{x_0\}$ $\quad f(x) \in V_2$

: quindi per 2) vi è $\underline{\bar{x} \in U_1 \cap U_2 \setminus \{x_0\}}$, $f(\bar{x}) \in V_1 \cap V_2$ contr. 1).

Acc$(A \cap (x_0, +\infty))$

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (finito)

$f: A \to \mathbb{R}$. Si dice che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 da destra e si scrive

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$ se

$\forall V$ intorno di l esiste $\delta > 0$ t.c.

$$x_0 < x < x_0 + \delta,\ x \in A \Rightarrow f(x) \in V.$$

---

da sinistra se $x_0 \in Acc(A \cap (-\infty, x_0))$

$$x_0 - \delta < x < x_0,\ x \in A \Rightarrow f(x) \in V$$

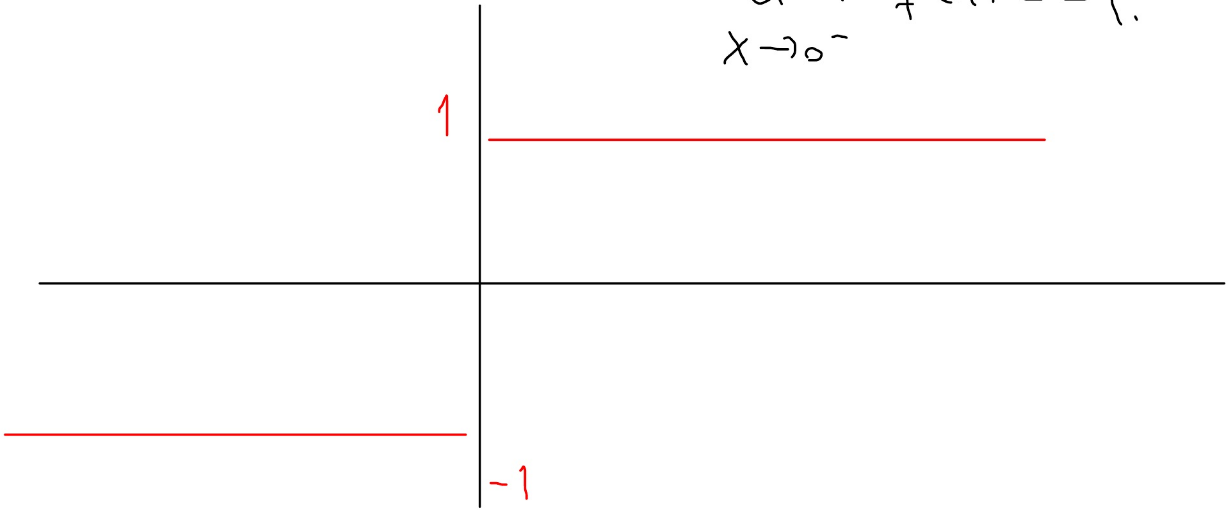
e si scrive $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

Esempio: $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$



Oss: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se e solo se

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

Nell'esempio precedente non esiste $\lim_{x \to 0} f(x)$ perché $\underbrace{\lim_{x \to 0^+} f(x)}_{1} \neq \underbrace{\lim_{x \to 0^-} f(x)}_{-1}$.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$.

Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+ \qquad (\text{con } l \in \mathbb{R})$$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e esiste V intorno di x_0 t.c.

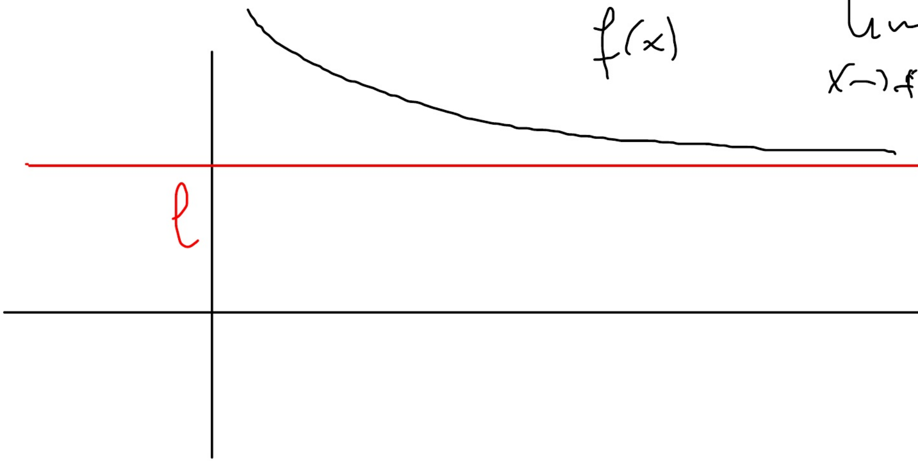
$$x \in V \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > l.$$

Analoga definizione per $\lim_{x \to x_0} f(x) = l^-$

dove richiederò che

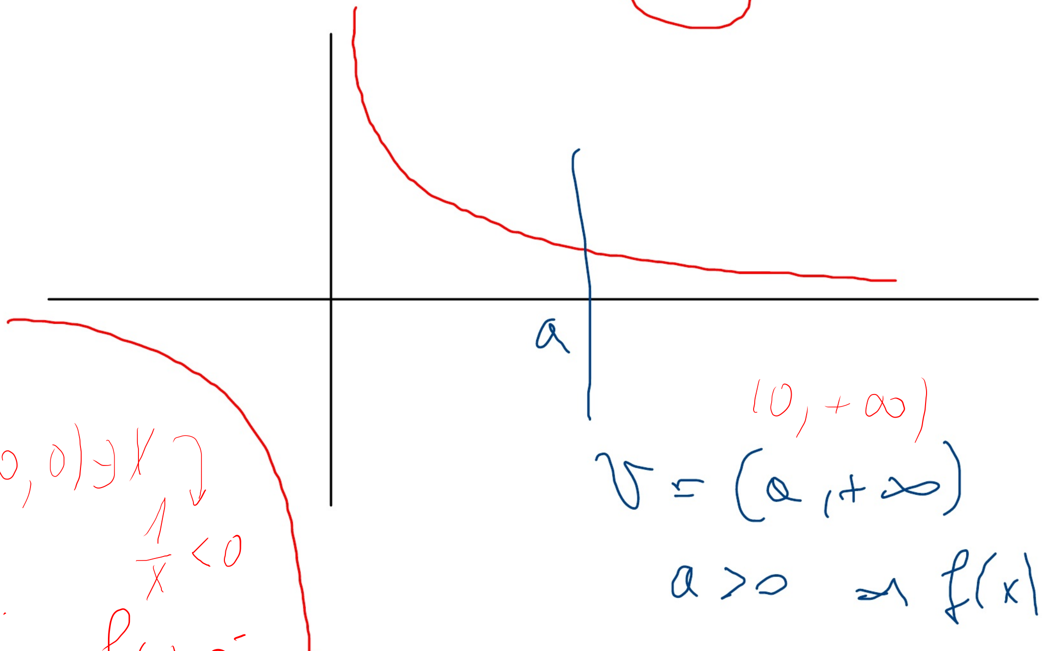
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\exists\, U$ ind. di x_0 t.c.

$x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) < \ell$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell^+$

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$



$(0, +\infty)$

$U = (a, +\infty)$

$a > 0 \Rightarrow f(x) > \boxed{0} = l.$

$(-\infty, 0) \ni x \Rightarrow \frac{1}{x} < 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$

Teorema della permanenza del segno

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$.

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ e $l \neq 0$

allora esiste un intorno V di x_0

t.c. se $x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$ allora

f ha lo stesso segno di l.

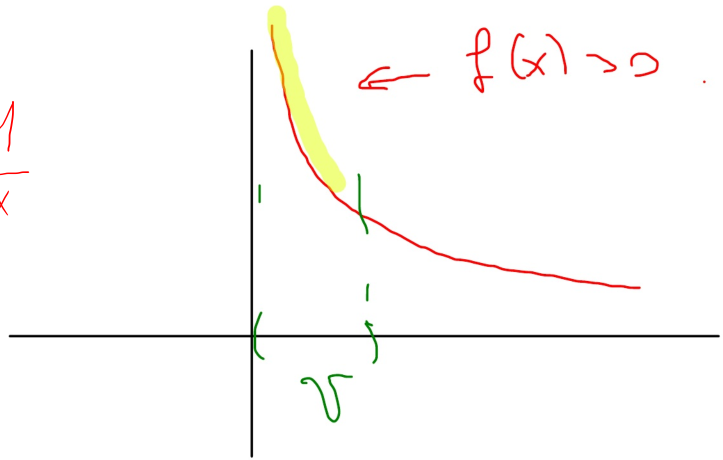
$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ $\quad l \neq 0 \implies \exists\, \mathcal{U}_{int}$ di x_0 $\quad \underset{x \neq x_0}{x \in A \cap \mathcal{U} \setminus \{x_0\}}$ $\quad f(x) \cdot l > 0$

$(x_0 \in Acc(A))$

Esempio: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty > 0$$

$\Rightarrow$ $f(x) > 0$ in un intorno destro di 0



OSS $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

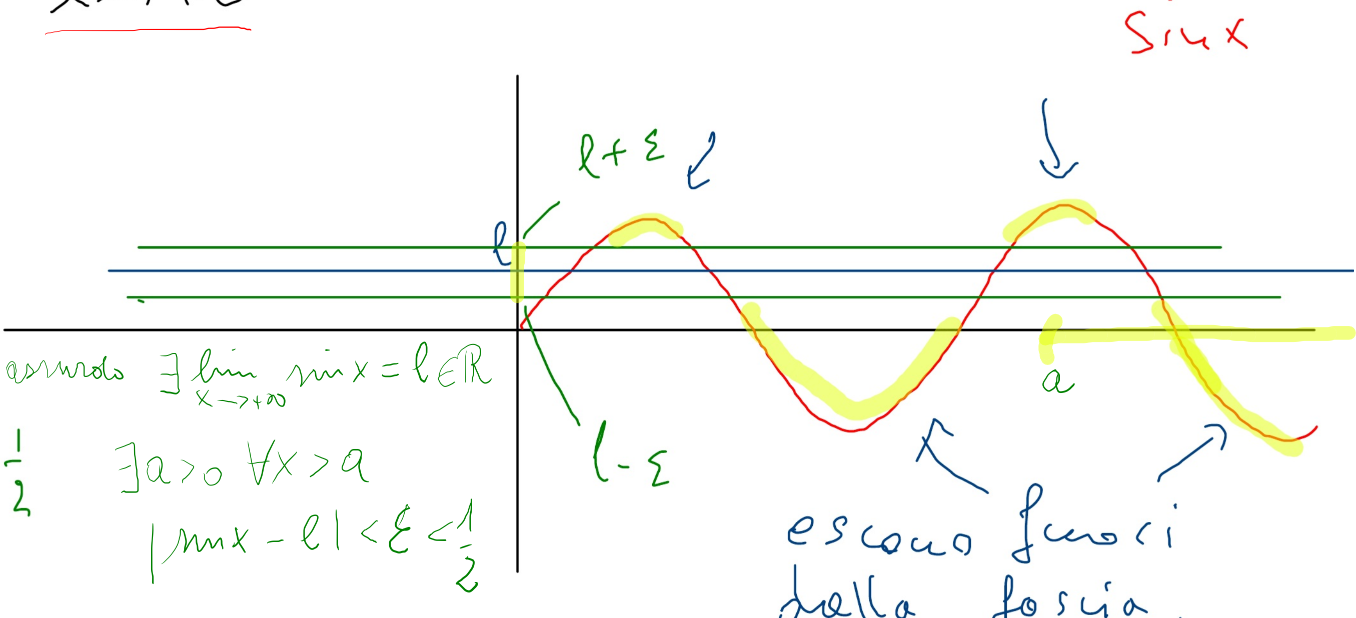
$\exists \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\#$

$\exists \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Esempio: non esiste il limite

$$\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin x .$$



per assurdo $\exists \lim_{x \to +\infty} \sin x = l \in \mathbb{R}$

$\varepsilon < \frac{1}{2}$ $\quad \exists a > 0 \ \forall x > a$

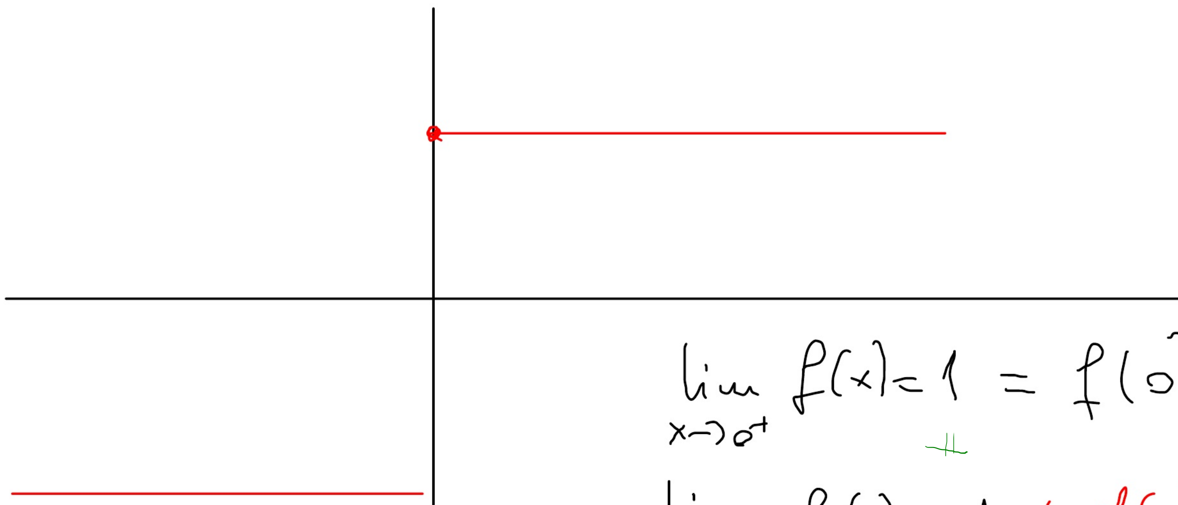
$|\sin x - l| < \varepsilon < \frac{1}{2}$

Se esistesse il limite $l \in \mathbb{R}$ allora scelgo $\varepsilon < \frac{1}{2}$ nella definizione di limite. Quindi dovrebbe esistere $a \geq 0$ tale che

$$x > a \implies \qquad l - \varepsilon < \sin x < l + \varepsilon$$

ma questo vorrebbe dire che $\sin x$ oscilla con un'ampiezza minore di $2\varepsilon < 1$ mentre $\sin x$ oscilla con ampiezza 2.

Es: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq f(0).$$

Def : $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $x_0 \in Acc(A)$. $x_0 \in Acc(A \cap [x_0, +\infty))$

Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ allora si dice che

f è continua a destra in x_0.

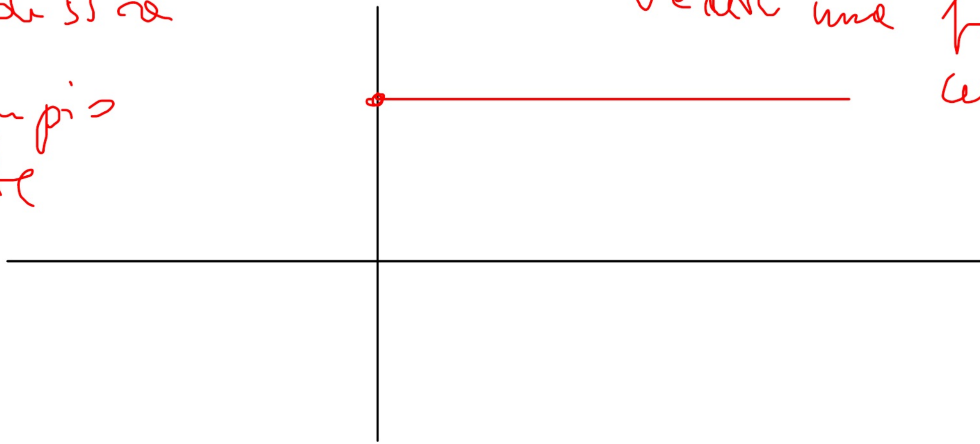
Se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ si dice che

$x_0 \in Acc(A \cap (-\infty; x_0])$

f è continua a sinistra in x_0.

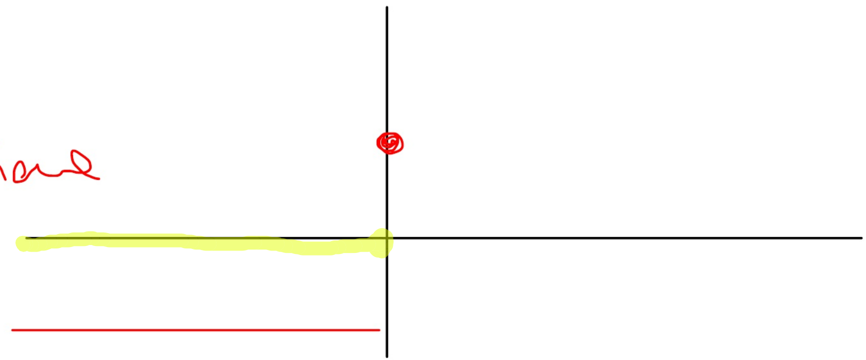
$Acc E$ = insieme dei pti di accumulazione per E

metà destra
dell'esempio
precedente



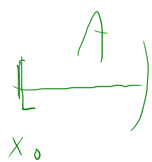
vedete una funzione
continua

metà sinistra
vedo una funzione
non continua
in $x_0 = 0$



Oss: f è continua in x_0 se e solo se è continua sia a destra che a sinistra in x_0.

$$\left(x_0 \in Acc\left(A \cap [x_0, +\infty)\right) \cap Acc\left(Acc\left(A \cap (-\infty; x_0]\right)\right) \right)$$



Teorema di confronto

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$

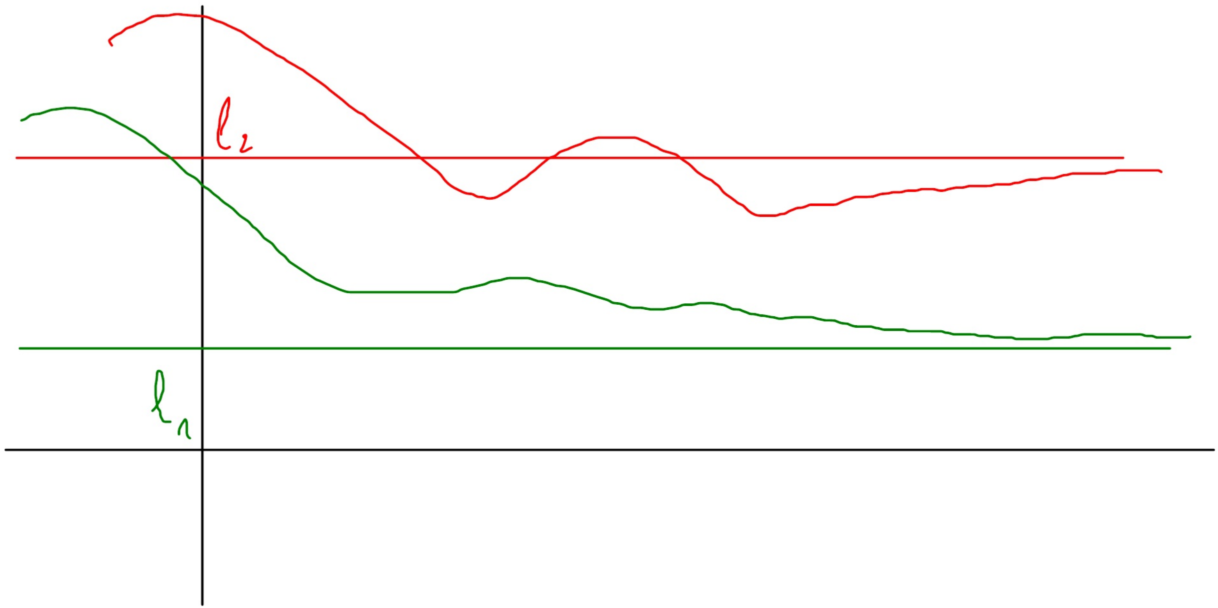
Se esistono

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

e se esiste V intorno di x_0 tale che

$$x \in V \cap \underbrace{A \setminus \{x_0\}}_{x \neq x_0} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

allora $l_1 \leq l_2$.



l_2
l_1

in maniera sintetica si potrebbe dire che la disuguaglianza passa al limite

$$f(x) \leq g(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(nelle ipotesi corrette).

Oss: Se fosse $f(x) < g(x)$ potrei concludere

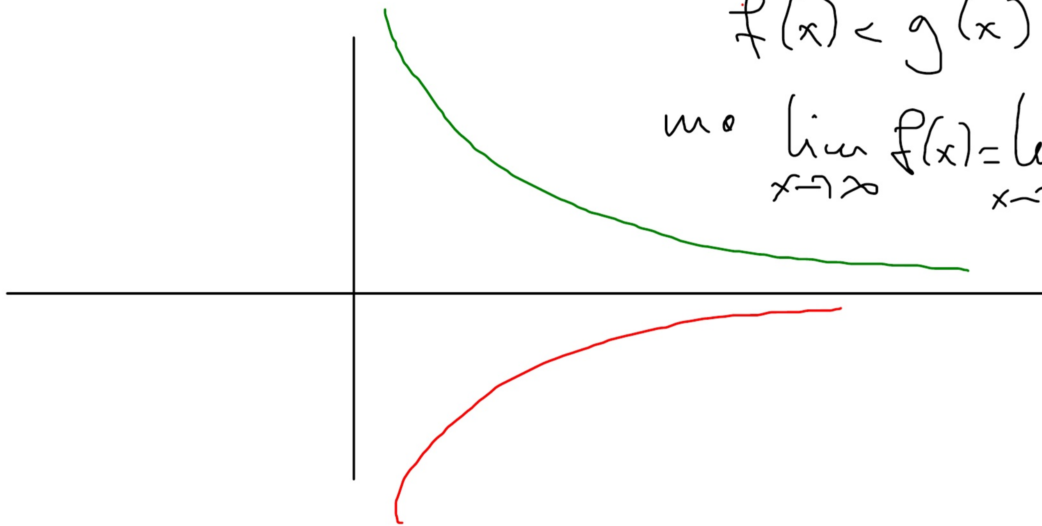
$$\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x) \;?$$

NO?

$g(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = -\frac{1}{x}$

$\boxed{x > 0}$



$f(x) < g(x)$

ma $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$

$$f(x) \boxed{<} g(x) \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \boxed{\leq} \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Le disuguaglianze passano al limite ma diventano deboli.

Teorema dei Carabinieri

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(A)$, $f, g, h : A \to \mathbb{R}$.

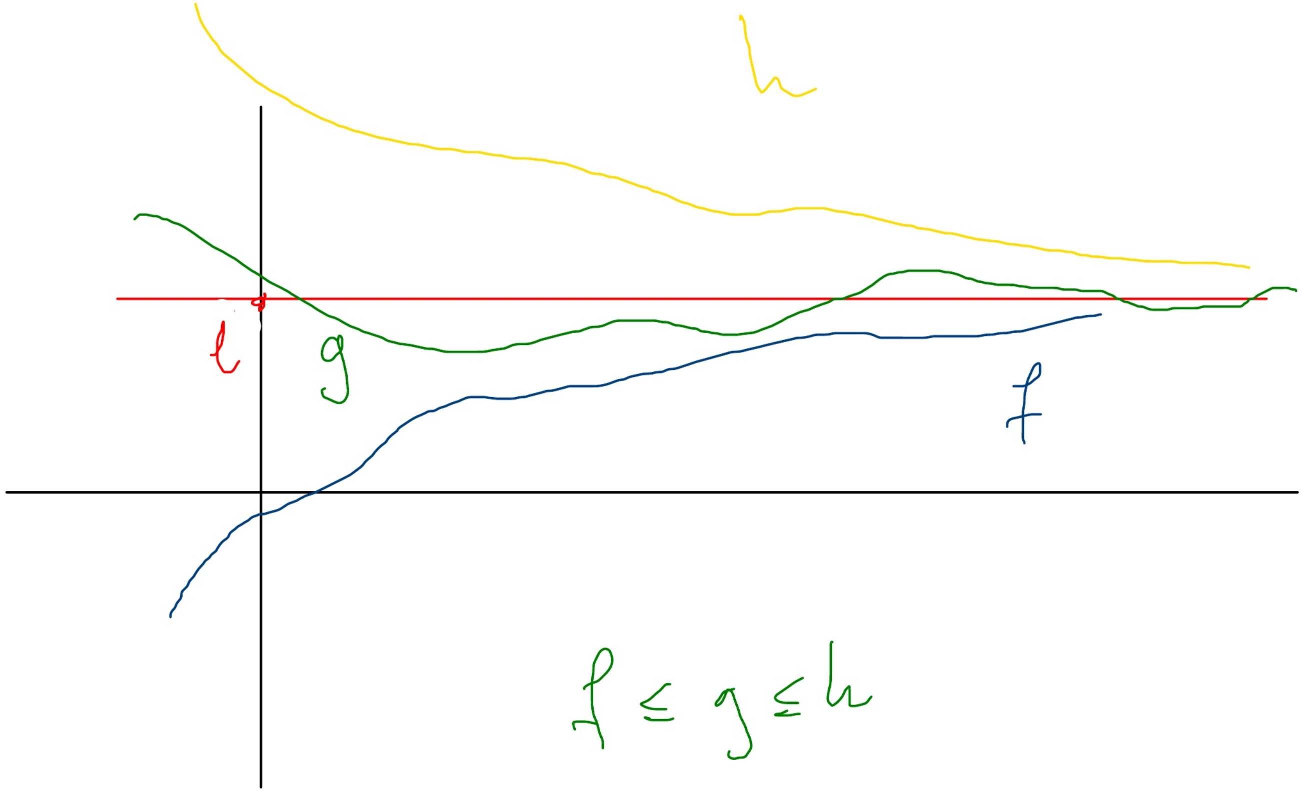
Se esistono

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ e se

esiste un intorno V di x_0 t.c.

$x \in A \cap V \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \le g(x) \le h(x)$

allora esiste $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$



$f \leq g \leq h$

dall'esistenza di limiti di f e h (uguali fra loro) deduco l'esistenza del limite di g.

Es.: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2+\sin x}{x}$ $\quad 0 \leftarrow \frac{1}{x}(2+\sin x)$ $\nexists \lim$

posso considerare $x>0$ $\left(\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\right)$

$$\frac{1}{x} \overset{x>0}{\leq} \frac{2+\sin x}{x} \overset{x>0}{\leq} \frac{3}{x} \quad\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2+\sin x}{x} = 0$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\qquad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$

$$-|g|M \leq |gf| \leq |g|M$$

$-|g|M \to 0$, $|gf| \to 0$, $|g|M \to 0$

se $|f| \leq M$ in $\mathcal{U}(x_0)$

$g \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ allora

$g(x)f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

Teorema (somma e prodotto).

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$.

Supponiamo che esistano i limiti

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad e \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2} \quad \text{con } l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$$

1) se ha senso $l_1 + l_2$ allora esiste

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = l_1 + l_2$$

2) Se ha senso $\ell_1 \cdot \ell_2$ allora esiste

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2 .$$

Sono esclusi i casi $\ell_1 = +\infty$, $\ell_2 = -\infty$ e viceversa per la somma

$(+\infty) + (-\infty) = ?$ non ha senso

e i casi $(+\infty) \cdot 0$ oppure $(-\infty) \cdot 0$ per il prodotto. Si dicono casi di indeterminazione.

Esempi di indeterminazione

Perché non ha senso $(+\infty)+(-\infty)$?

$f(x) = \underline{2x}$ $\qquad$ $g(x) = \underline{-}x$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$

$$\lim_{x\to+\infty} (\underline{f+g})(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x-x) = \lim_{x\to\infty} x = \underline{+\infty}.$$

Allora in questo caso avrei che

$$(+\infty)+(-\infty) = +\infty .$$

Invece se prendo

$$f(x) = \frac{x}{2} \qquad g(x) = -x$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{2} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{x}{2}\right) = -\infty$$

e in questo caso avrei

$$(+\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Quale delle due scelgo?

Per questo motivo dico che

$(+\infty)+(-\infty)$ non ha senso.

Allo stesso modo per il prodotto

$0 \cdot (+\infty)$

esempi: $f(x)=\frac{1}{x} \to 0$ $\quad g(x)=x \to +\infty$

per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

e in questo caso avrei $(0)\cdot(+\infty)=1$

Se invece prendo $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = x^2$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot x^2\right) = \lim_{x \to \infty} x = +\infty$

e in questo caso avrei

$$0 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Non so cosa scegliere.

Dirò quindi $0 \cdot (+\infty)$ non ha senso.

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f: A \to \mathbb{R}$.

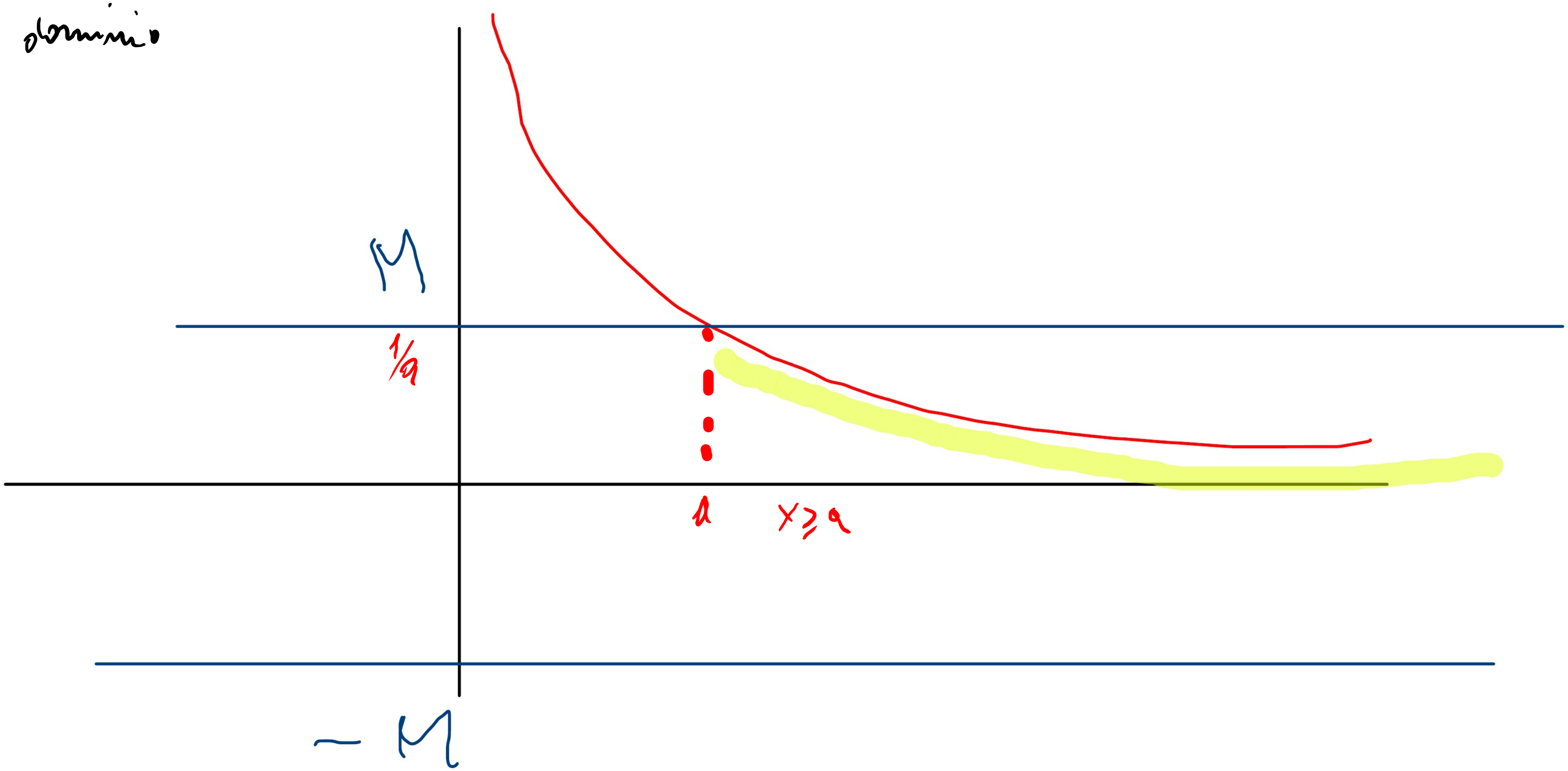
Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $l \in \mathbb{R}$ (cioè l non è $\pm\infty$), allora f è limitata in un intorno di x_0, cioè

$\exists\, V$ intorno di x_0 e $\exists\, M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ t.c.

$$x \in V \cap A \Rightarrow |f(x)| \leq M.$$

Es: $x>0$, $f(x)=\frac{1}{x}$ ma è limitata in un intorno di $+\infty$ perché $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

f non è limitata nel suo dominio



Def: Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ allora si dice che f è infinitesima per x che tende a x_0 (da specificare)

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si dice che f diverge positivamente per x che tende a x_0

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si dice che f diverge negativamente.

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$ (finito)

si dice che f converge a l

per x che tende a x_0.

Prop.: Se f è limitata inferiormente in un intorno di x_0 e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty.$$ (anche se $\nexists \lim_{x \to x_0} f$)

Se f è limitata superiormente in un intorno di x_0 e $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = -\infty$$

Se f è limitata in un intorno di x_0

e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ allora

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0 .$$

(anche se $\nexists \lim_{x \to x_0} f$)

Sono tutte conseguenze del teorema dei Carabinieri.

ES: $\lim_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\quad \sin x \geq -1 \quad \nexists \lim_{x \to +\infty} \sin x$

$\lim_{x \to +\infty} \sin x$ non esiste

non posso applicare il teorema del limite della somma.

Però $\sin x$ è limitato inferiormente

allora

$$\lim_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty .$$

perché $\sin x$ è limitata inferiormente

$$\underbrace{x - 1}_{\downarrow \atop +\infty} \leq x + \sin x \leq \dots$$

$\Rightarrow$ $x + \sin x \to +\infty$.

per il teorema dei Carabinieri.

Osservazione: se $f : A \to \mathbb{R}$, $C \subset A$, $x_0 \in Acc(C) \subset Acc(A)$

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \implies \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \qquad g = f : C \to \mathbb{R}$$

$$(g = \underline{f|_C})$$

Osservazione: se $x_0 \in Acc(C)$, $x_0 \in Acc(B)$, $B \cup C = A$, $f : A \to \mathbb{R}$

$$\exists \lim_{x_0} f|_C = \ell_1$$
$$\exists \lim_{x_0} f|_B = \ell_2$$
e $\underline{\ell_1 = \ell_2} \iff \exists \lim_{x_0} f = \ell_1 = \ell_2$

Osservazione: per verificare che $\boxed{\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)}$ $f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in Acc(A)$

basta trovare quindi $C, B \subset A$, $x_0 \in Acc(C) \cap Acc(B)$ per cui

$\exists \lim_{x_0} f|_C = l_1$ e $\exists \lim_{x_0} f|_B = l_2$ $\boxed{\text{ma } l_1 \neq l_2}$

Esempio: un altro modo per ottenere $\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ (cfr. pagg. 26-27 5 dt.) è anche

$f(x)=\sin x$, $A=\mathbb{R}$, $x_0=+\infty$, $C=\left\{\frac{\pi}{2}+2n\pi : n\in\mathbb{N}\right\}$, $B=\left\{\frac{3}{2}\pi+2n\pi : n\in\mathbb{N}\right\}$

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f|_C = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \neq -1 = \lim_{x\to+\infty} -1 = \lim_{x\to+\infty} f|_B$$

— · —

Basandosi su quanto osservato e sul fatto che $f\circ g$ in sostanza restringe f ad $Im\, g$ si hanno i seguenti teoremi:

Teorema (di sostituzione, di cambio di variabile nei limiti o limite della composizione)

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$. Se

1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) =: y_0$ 2) $y_0 \in Acc(B)$ 3) $\exists \lim_{y \to y_0} g(y) =: \ell$ e:

o 4.1) $y_0 \in B$ e g è continua in y_0 o 4.2) $\exists \mathcal{U}$ di x_0 $\forall x \in A \cap \mathcal{U} \setminus \{x_0\}$ $f(x) \neq y_0$

allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell$$

Teorema (Ponte, di collegamento) $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, si ha:

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff$ per ogni $a_n : [m; \infty) \cap \mathbb{N} \to A$ tale che

1) $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ e 2) $a_n \neq x_0$ si ha

$$\exists \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \ell$$