Teorema di Weierstrass generalizzato

Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua tale che $\exists \lim_{x \to a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to b} f(x) = l_2$.

Valgono i seguenti risultati:

1) f è limitata inferiormente $\Longleftrightarrow$ $l_1 \neq -\infty$ e $l_2 \neq -\infty$
2) f è limitata superiormente $\Longleftrightarrow$ $l_1 \neq +\infty$ e $l_2 \neq +\infty$
3) f è limitata $\Longleftrightarrow$ $l_1 \in \mathbb{R}$ e $l_2 \in \mathbb{R}$

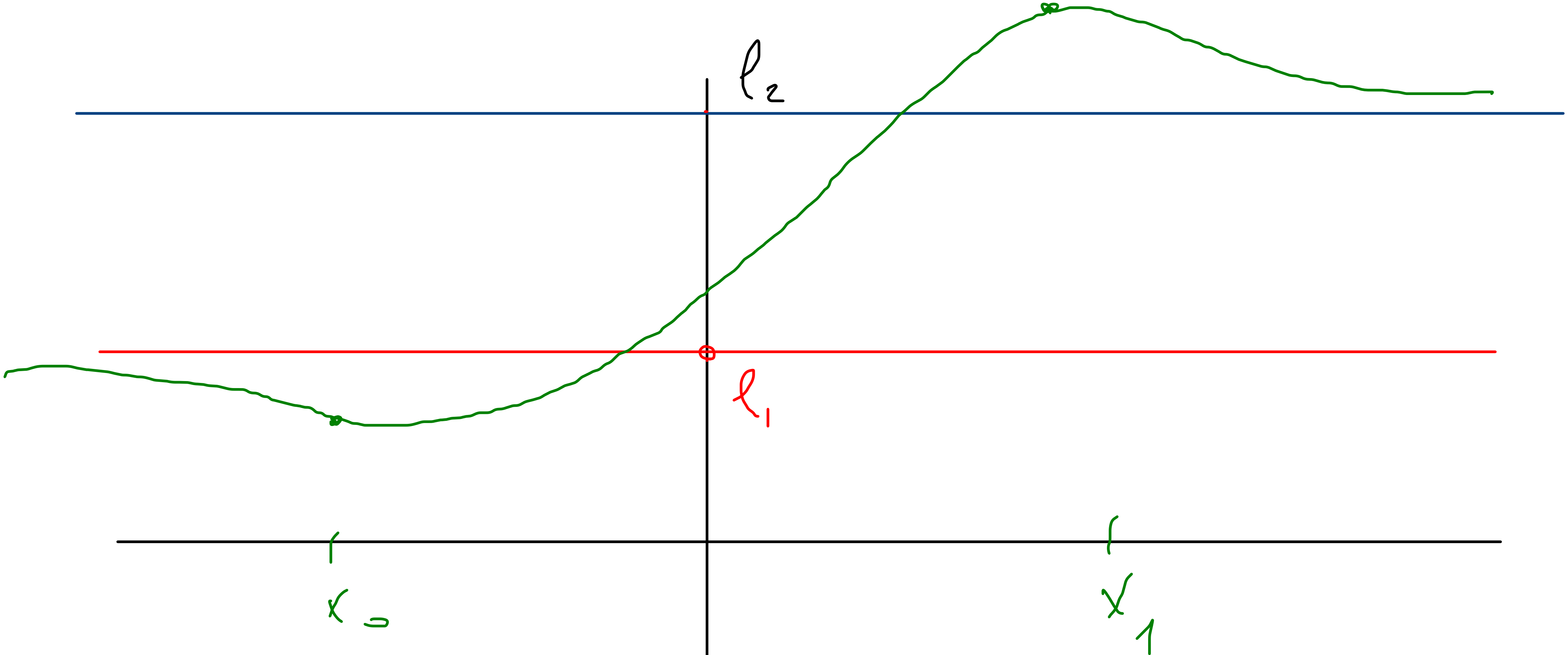
4) f ha minimo $\iff \exists\, x_0 \in (a,b)$ t.c.

$$f(x_0) \leq \min\{l_1, l_2\}$$

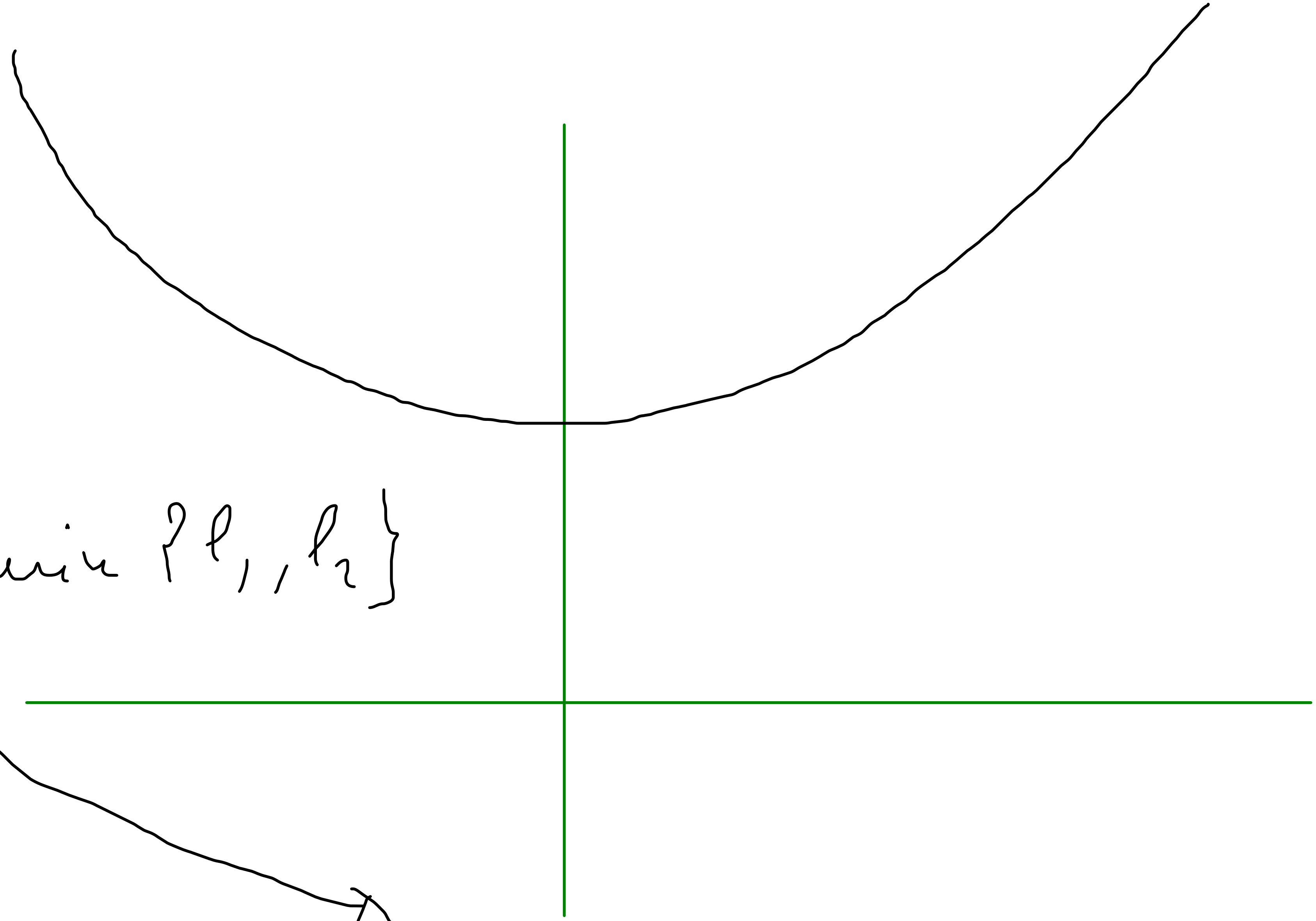
5) f ha massimo $\iff \exists\, x_1 \in (a,b)$ t.c.

$$f(x_1) \geq \max\{l_1, l_2\}.$$

Osservazione: I risultati precedenti valgono anche nel caso $a \in \mathbb{R}$ e $f: [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ oppure $b \in \mathbb{R}$ e $f: (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (f continua).



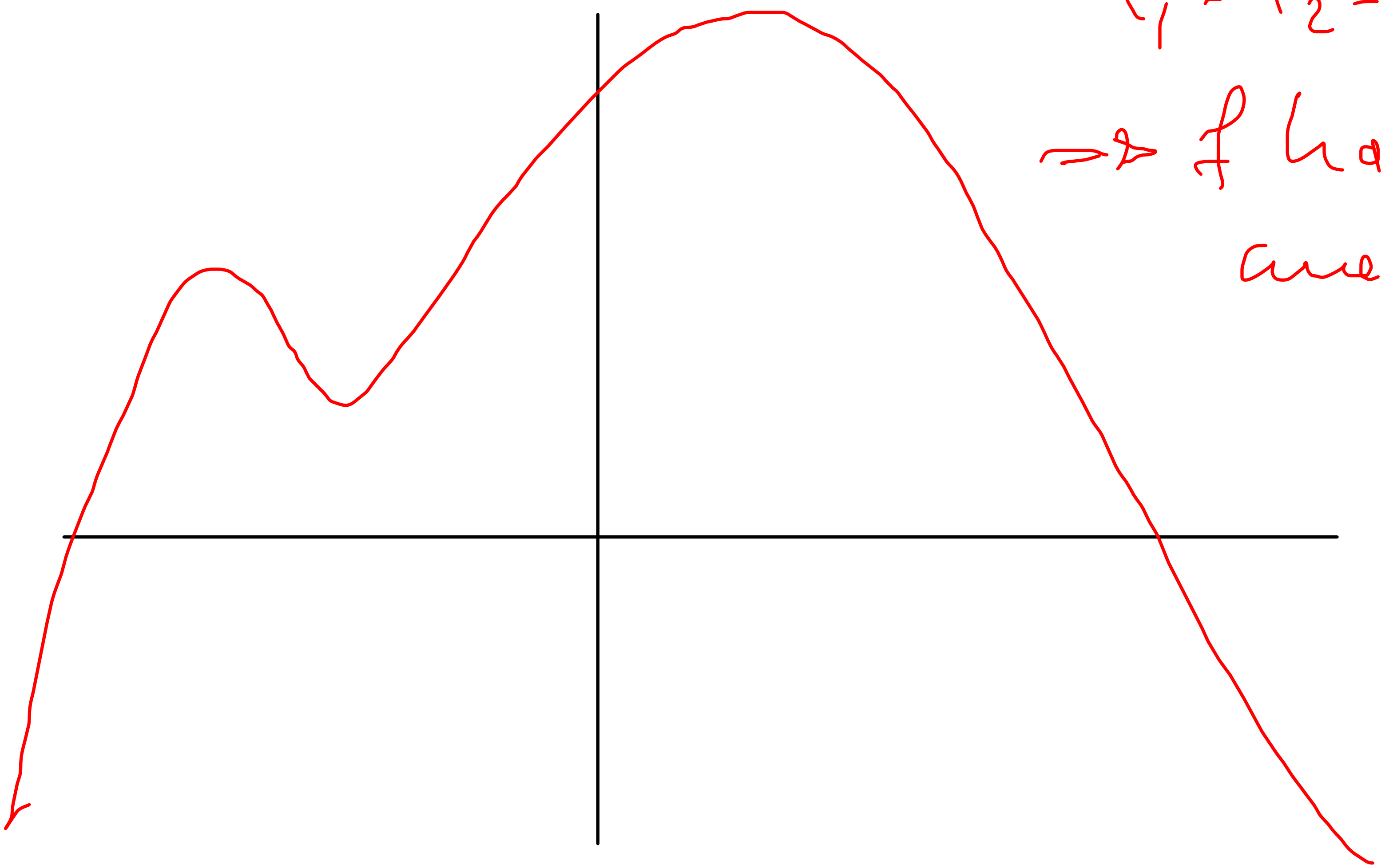
$a = -\infty \quad , b = +\infty$



$f(x) < \min\{l_1, l_2\}$

$\forall x$

$l_1 = l_2 = +\infty$ $\Rightarrow$ f ha minimo.



$l_1 = l_2 = -\infty$

$\Rightarrow \exists$ ha

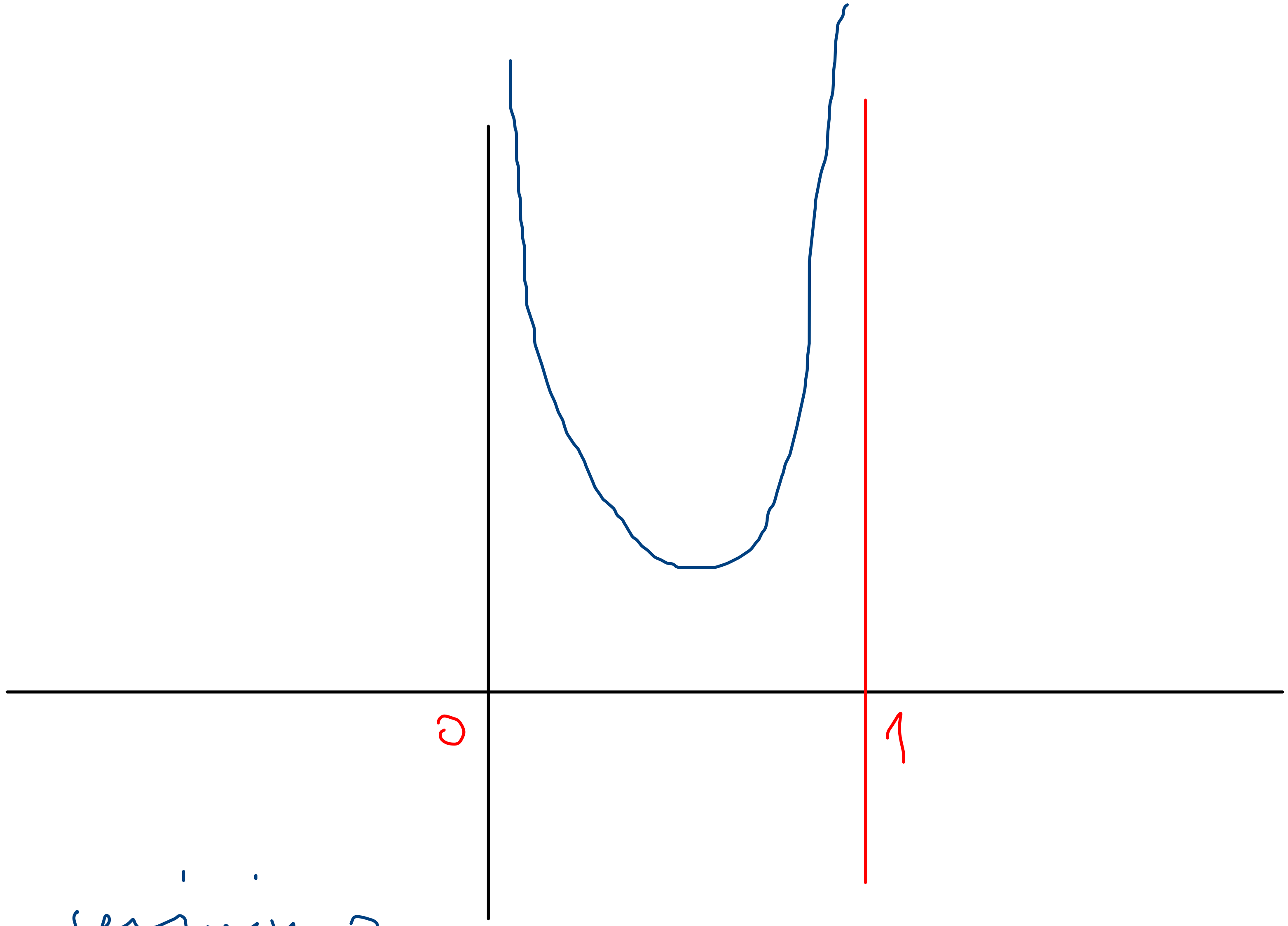
massimo.

Esempio: $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x-x^2}$

$$\frac{1}{x-x^2}=\frac{1}{x(1-x)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x(1-x)}=\frac{1}{0^+\cdot 1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x(1-x)}=\frac{1}{1(1-1^-)}=\frac{1}{1\cdot 0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty.$$



$\Rightarrow$ f ha minimo.

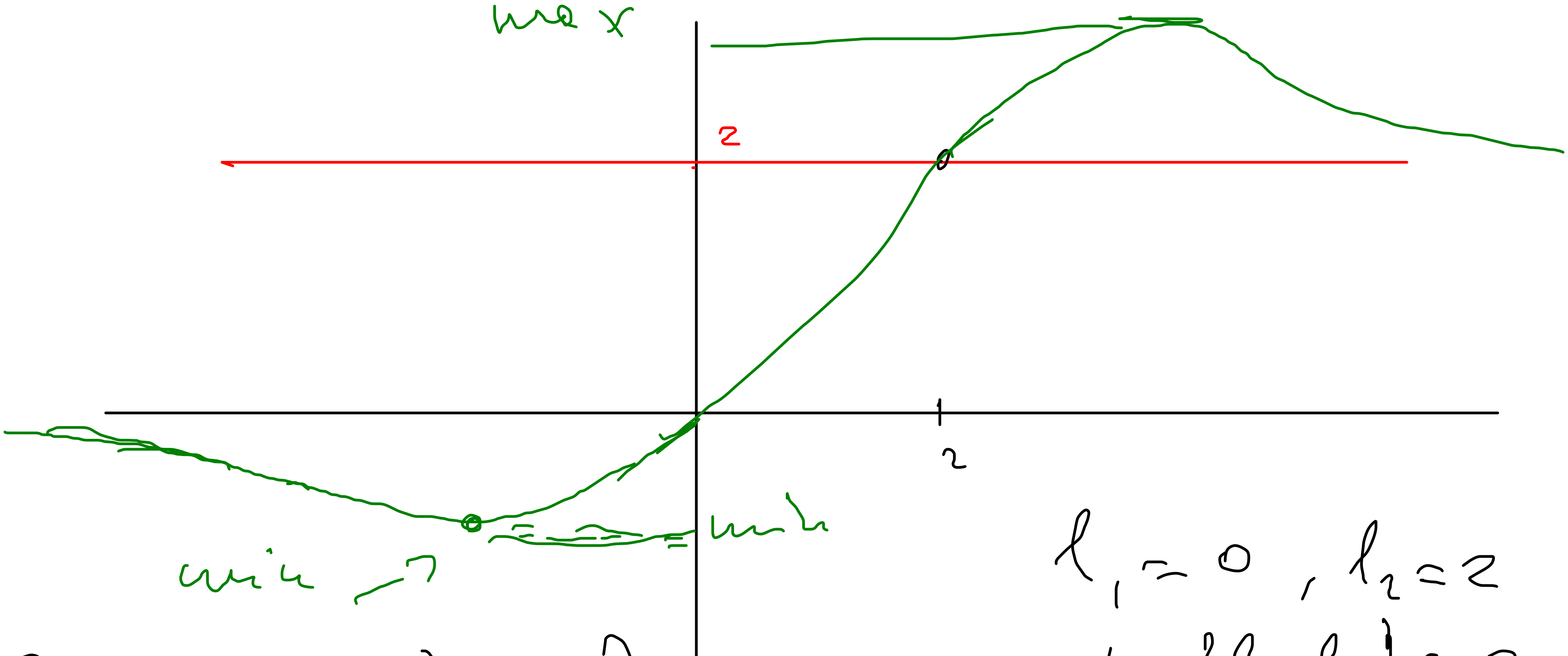
$$f(x) = \frac{x^2 + x|x| + x}{1+x^2} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

ha max o min?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+x}{1+x^2} & \text{se } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{x}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x}{1+x^2} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$



$l_1 = 0 \ , \ l_2 = 2$

$\min\{l_1, l_2\} = 0$

$\max\{l_1, l_2\} = 2$

$\exists \ x_0 : f(x_0) \leq 0 \ ?$

se $x < 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} < 0 \quad \forall \ x < 0$

$\Rightarrow$ f ha minimo

f ha max? $\exists\, x_1 : f(x_1) \ge 2$?

risolvo

$$\frac{2x^2+x}{1+x^2} \ge 2 \iff 2x^2+x \ge 2(1+x^2)$$

$$\cancel{2x^2}+x \ge 2+\cancel{2x^2} \iff \boxed{x \ge 2}$$

ha soluzione $\Rightarrow$ f ha max.

Infinitesimi

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$. ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$). Si dice che f è o-piccolo di g per x che tende a x_0, e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

se esiste una funzione $\omega(x)$ t.c.

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0 \quad \text{e} \quad f(x) = g(x) \cdot \omega(x).$$

Oss: Se esiste un intorno V di x_0 t.c.

$g(x) \neq 0 \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}$ allora

$$f(x) = o(g(x)) \iff \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \omega(x) \cdot g(x) \implies \frac{f(x)}{g(x)} = \omega(x) \longrightarrow 0.$$

Es: $f(x) = x^3$ $\qquad g(x) = x^2$

$\Rightarrow \quad f(x) = o(g(x))$ per $x \to 0$.

infatti $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^3}{x^2} = x \longrightarrow 0$ per $x \to 0$.

$f(x) = g(x) \cdot x$ $\qquad \omega(x)$ e $\omega(x) \to 0$.

$x^3 = x^2 \cdot x$

Proprietà degli o-piccoli

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$.

Tutti gli o-piccoli si intendono per $x \to x_0$.

1) $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$

2) Se $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0 \Rightarrow o(kg) = o(g)$

3) $o(g) + o(g) = o(g)$

4) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) = o(g(x))$

5) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ allora

$$o(g) + o(fg) = o(g)$$

6) $o(o(g)) = o(g)$.

7) $o(f+g) = o(f) + o(g)$

8) $o(g) \cdot o(f) = o(gf)$.

Oss: $o(g) - o(g) = o(g) + \boxed{(-1)} o(g) =$

$k \in \mathbb{R}$

$= o(g) + o(-1 \cdot g) = o(g) + o(g) = o(g).$

Es: $x^3 = o(x^2)$ $\quad x^4 = o(x^2)$

$x^3 - x^4 \neq 0.$

Oss: li useremo molto spesso con

$g =$ potenza di x (o di $x - x_0$).

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha > \beta \Rightarrow \boxed{x^{\alpha} = o(x^{\beta})}$

perché $\quad x^{\alpha} = x^{\beta} \cdot x^{\alpha - \beta}$

$\Rightarrow \quad \omega(x) = x^{\alpha-\beta} \longrightarrow 0 \quad$ perché $\alpha > \beta$.

$$\frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} = x^{\alpha-\beta} \longrightarrow 0 \quad \text{perché } \alpha > \beta$$

$$x^{5} = o(x^{3}).$$

Es: $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sin x$. per $x \to 0$

Dico che $f(x) = o(x)$. Infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot \sin x}{x} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}}_{\to 1} = 0 \cdot 1 = 0$$

$\Rightarrow f(x) = o(x)$

Sviluppi al primo ordine

Dai limiti notevoli sappiamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0 \quad \text{quindi,}$$

per definizione $\Rightarrow \sin x - x = o(x)$

$$\Rightarrow \boxed{\sin x = x + o(x)} \quad \text{per } x \to 0 .$$

Dal limite $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

ottengo, come prima, che

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1 .$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = x + o(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{e^x = 1 + x + o(x)} \quad \text{per } x \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\log(1+x) = x + o(x)} \quad \text{per } x \to 0.$$

Es: $(\operatorname{tg} x)^2 = ?$ in termini di o-piccoli?

$$\operatorname{tg} x = x + o(x)$$

$$\Rightarrow (\operatorname{tg} x)^2 = (x + o(x))^2 = x^2 + 2x \cdot o(x) + (o(x))^2$$

$$= x^2 + o(2x^2) + o(x^2) = x^2 + \underbrace{o(x^2) + o(x^2)}$$

$$= x^2 + o(x^2)$$

$$(\operatorname{tg} x)^2 = x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin^2 x) - 1}{x^4} = ?$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$$

$$\cos(\sin^2 x) - 1 = \cos(\underbrace{x^2 + o(x^2)}) - 1$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{se } t \to 0$$

sostituzione $t = x^2 + o(x^2)$

posso fare la sostituzione?

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ vale se $t \to 0$

se $t = x^2 + o(x^2)$ ottengo che se $x \to 0$

$x^2 + o(x^2) \longrightarrow 0$ quindi $t \to 0$

e posso sostituire.

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(\cdot^2) = 1 - \frac{(x^2 + o(x^2))^2}{2} +$$

$$+ o\left(\frac{(x^2 + o(x^2))^2}{2}\right) =$$

$$1 - \frac{x^4 + 2x^2 o(x^2) + (o(x^2))^2}{2} + o\left(\frac{x^4 + 2x^2 o(x^2) + o(x^2)^2}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{x^4 + o(x^4) + o(x^4)}{2} + o\left(\frac{x^4 + o(x^4) + o(x^4)}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) + o(x^4) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\frac{\cos(\sin^2 x) - 1}{x^4} = \frac{\cancel{1} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \cancel{1}}{x^4} =$$

$$\frac{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{2} + \underbrace{\boxed{\frac{o(x^4)}{x^4}}}_{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin^2 x) - 1}{x^4} = -\frac{1}{2}.$$

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$

Se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$$

dove U è un intorno di x_0, allora si dice che f è O-grande di g per x che tende a x_0 e si scrive

$$f(x) = O(g(x)) \text{ per } x \to x_0.$$

Oss: Se g non si annulla in un intorno di x_0 $\Rightarrow$

$$f = O(g) \iff \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M$$

in un intorno di x_0.

Es: $f(x) = x \sin x$, $g(x) = x$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{x \sin x}{x} \right| = |\sin x| \leq 1.$$

quindi

$f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$

per qualunque $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Def.: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(A)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ infinitesime per $x \to x_0$ (cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$). Se esistono $L, \alpha \in \mathbb{R}$ con $L \neq 0$ tali che

$$f(x) = L\,(g(x))^{\alpha} + o\big((g(x))^{\alpha}\big) \quad \text{per } x \to x_0$$

si dice che f è infinitesima di ordine α rispetto a g con parte principale $L(g(x))^{\alpha}$.

per x che tende a x_0.

Stessa definizione nel caso in cui f e g siano divergenti

(cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$).

Es: $f(x) = 3\sin x + x^2$, $g(x) = x$

$x_0 = 0$

f è di ordine 1 rispetto a g

per $x \to 0$. con parte principale $3x$

Infatti $3\sin x + x^2 = 3x + o(x)$

$(\sin x = x + o(x) \Rightarrow 3\sin x + x^2 = 3x + o(x) + x^2$

$= 3x + o(x)$.

Es: $f(x) = 5x^4 + \underbrace{(2\sin x)\cdot x^2 + 3x}_{o(x^4)}$, $g(x) = x$

f è di ordine 4 rispetto a x per $x \to +\infty$ con parte principale $5x^4$

$$f(x) = 5x^4 + o(x^4)$$

infatti $\dfrac{2\sin x \cdot x^2 + 3x}{x^4} \to 0$ per $x \to +\infty$.

Es: $f(x) = \log(e^{3x} + x^2)$ per $x \to +\infty$

$$\log(e^{3x} + x^2) = \log\left(e^{3x}\left(1 + \frac{x^2}{e^{3x}}\right)\right) =$$

$$= \log(e^{3x}) + \log\left(1 + \frac{x^2}{e^{3x}}\right) = 3x + \underbrace{\log\left(1 + \frac{x^2}{e^{3x}}\right)}_{\to 0}$$

per $x \to +\infty$

$f(x)$ è di ordine 1 rispetto a x con parte principale $3x$ per $x \to +\infty$

$$f(x) = 3x + o(x)$$

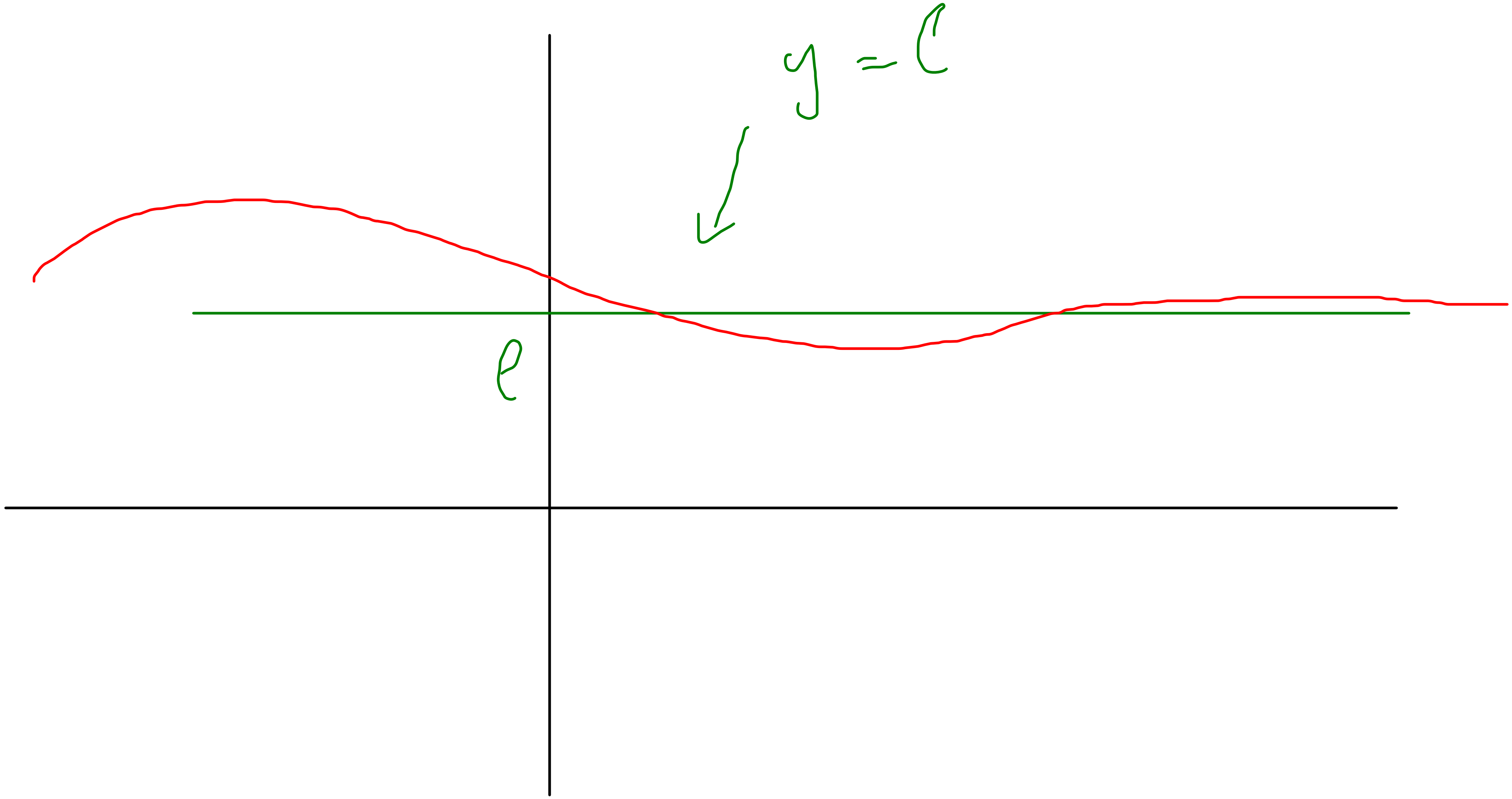
Asintoti

Def.: $f:(a,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ $a\in\overline{\mathbb{R}}$.

Se esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (finito)

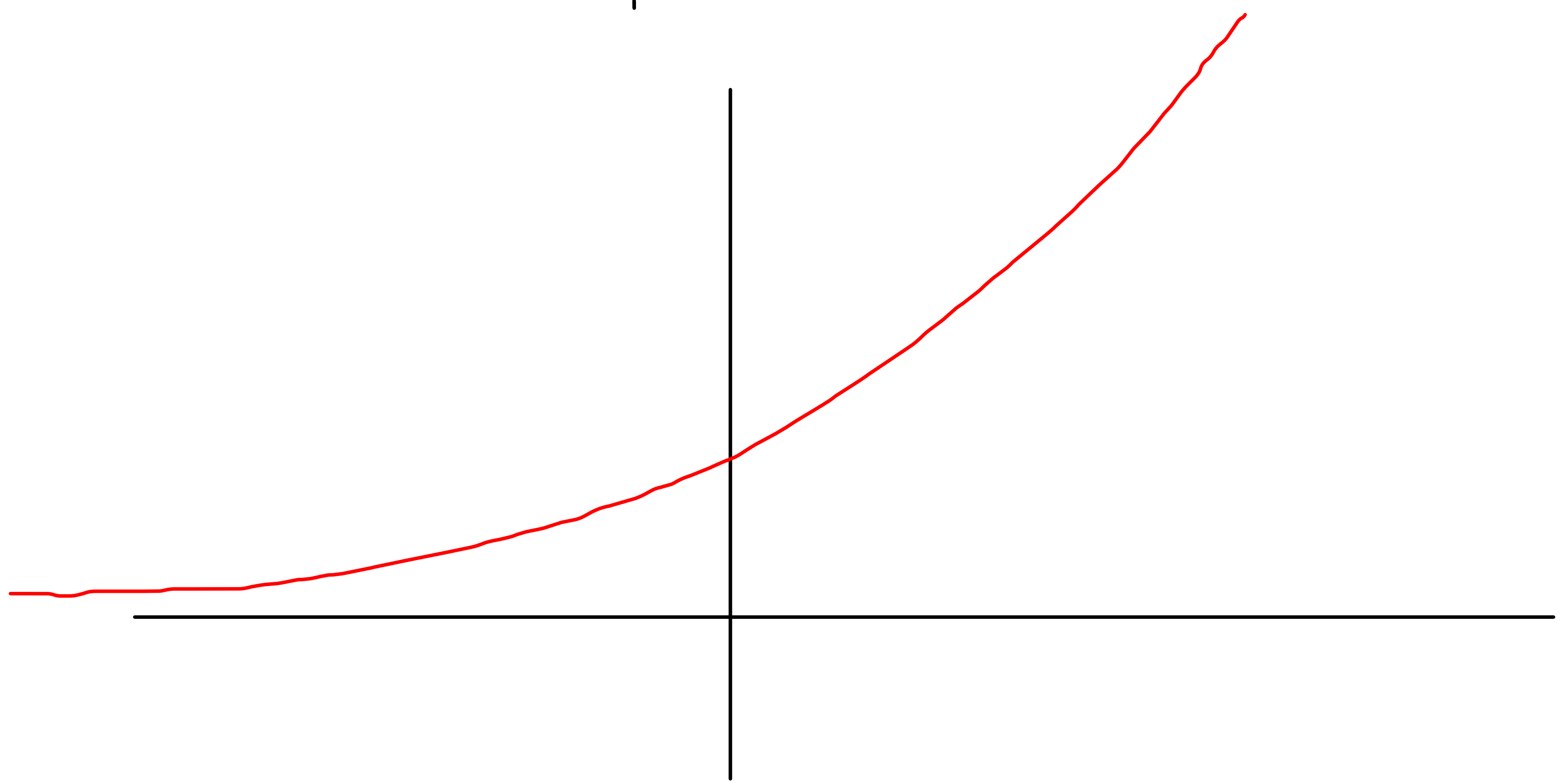
$\Rightarrow$ si dice che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y=l$ per x che tende a $+\infty$.

La stessa definizione vale se $x\longrightarrow -\infty$.


y = ℓ
ℓ

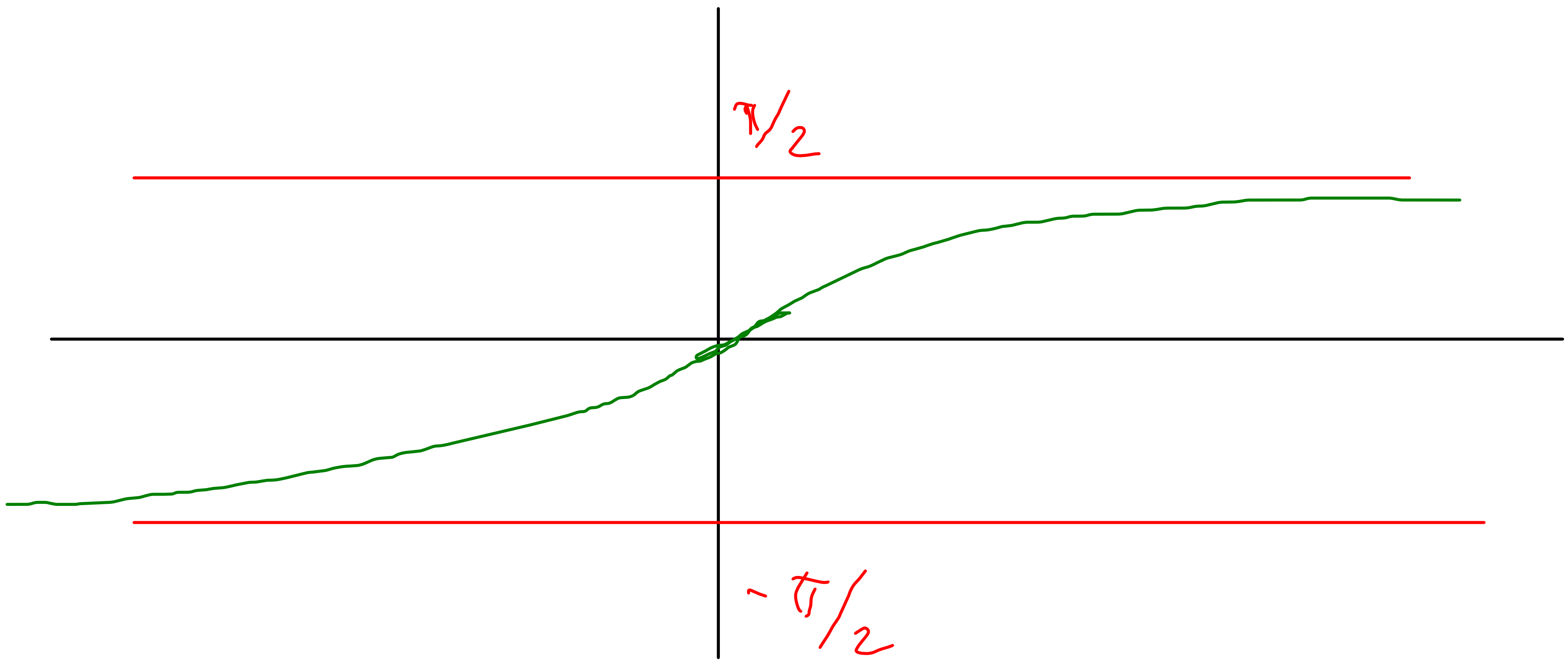
Es: $f(x) = e^x \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow f$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$



Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$



Es: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\quad f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

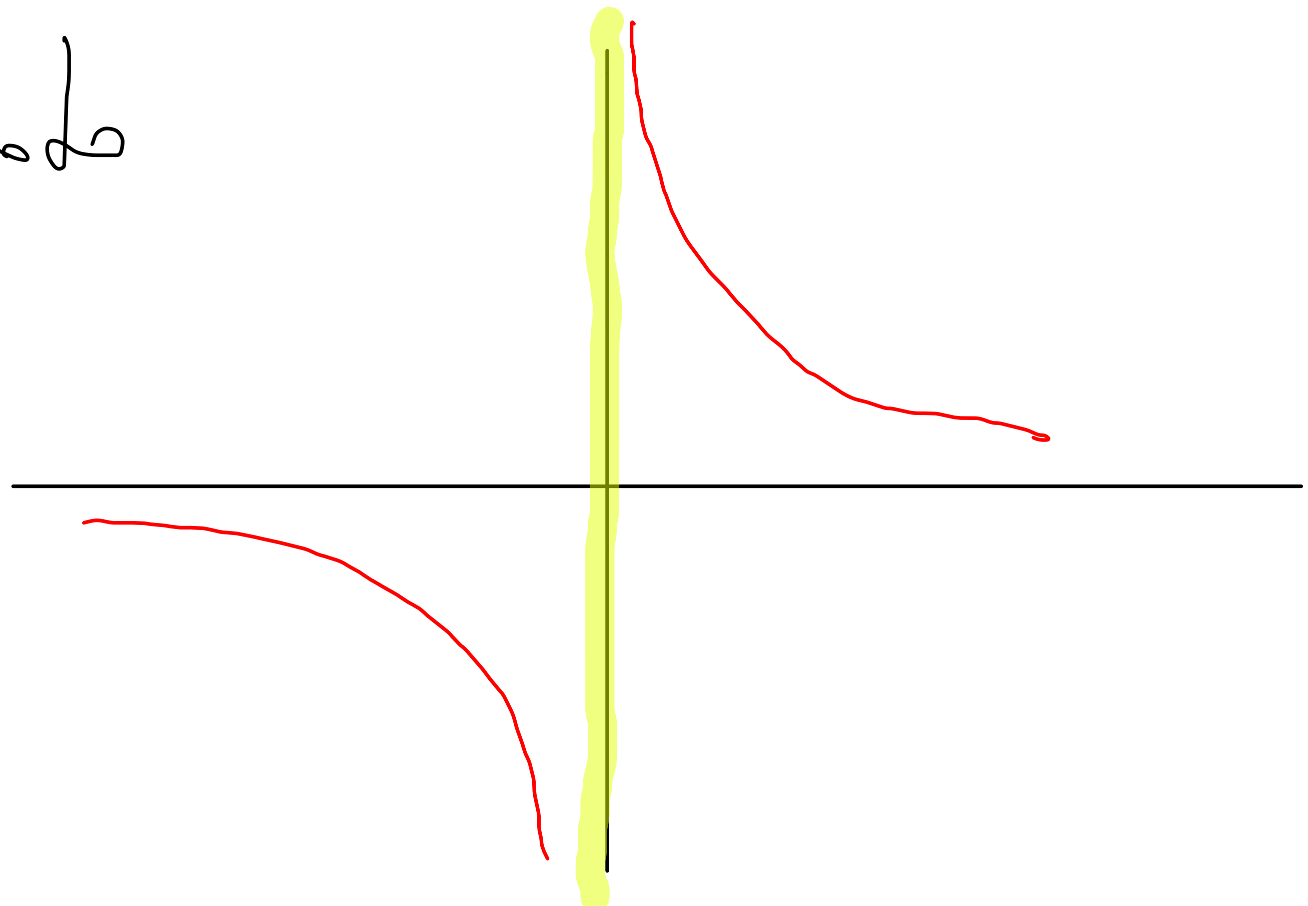
Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$.
Se f diverge per x che tende a x_0 da destra o da sinistra (o da entrambe le parti) si dice che f ha un asintoto verticale di equazione $x = x_0$.

Es. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

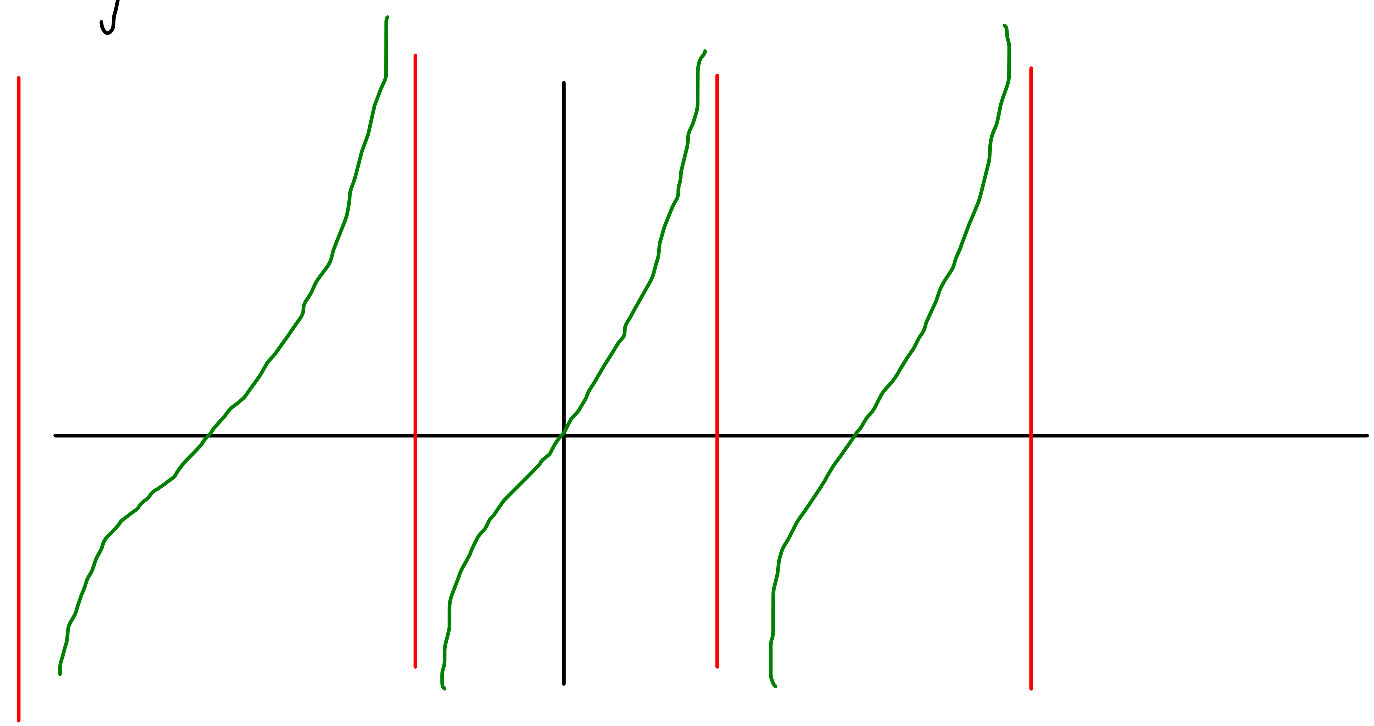
f ha un asintoto verticale di equazione

$x = 0$.



Oss: Una funzione al massimo ha 2 asintoti orizzontali (uno a $+\infty$ e uno a $-\infty$) ma può anche avere ∞ asintoti verticali.

Es. $f(x) = \operatorname{tg} x$ ha ∞ asintoti verticali



Def: $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$. Se esiste

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m\in\mathbb{R} \text{ con } m\neq 0$$

e esiste anche

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-mx=q\in\mathbb{R}$$

allora si dice che f ha un asintoto obliquo di equazione $y=mx+q$ per $x\to+\infty$. Lo stesso a $-\infty$.

Es: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+2}{x-5}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3x+2}{x^2-5x} = 2$$

$m = 2$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3x+2}{x-5} - 2x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3x+2-2x(x-5)}{x-5} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{2x^2} + 3x + 2 - \cancel{2x^2} + 10x}{x - 5} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{13x + 2}{x - 5} = 13$$

$y = 2x + 13$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Oss: Una funzione può avere al massimo 2 asintoti obliqui (uno a $+\infty$ e uno a $-\infty$). Inoltre non può avere contemporaneamente un asintoto orizzontale (e uno obliquo "dalla stessa parte")

Es: $f(x) = 3x + 5\log x \quad f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5\log x}{x} =$$

$$= 3 + \lim_{x\to\infty} \frac{5\log x}{x} = 3 + 0 = 3 = m$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \cancel{3x} + 5\log x - \cancel{3x}$$

$= +\infty \Rightarrow q$ non è finito

$\Rightarrow$ non c'è asintoto obliquo.