Esercizio: $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ $\quad x > -1, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha - 1}$$

$$f(0) = (1+0)^{\alpha} = 1, \quad f'(0) = \alpha (1+0)^{\alpha-1} = \alpha$$

f è derivabile quindi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

la calcoliamo con $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + o(x) = 1 + \alpha x + o(x)$$

A MEMORIA

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{per } x \to 0}$$

SVILUPPO BINOMIALE LINEARE $\left(\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \ \ x \to x_0\right)$

Es: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ $\alpha = \frac{1}{2}$.

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ per $x \to 0$.

$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$ $\alpha = \frac{1}{3}$

$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + o(x)$ per $x \to 0$

$(1+x)^{\pi} = 1 + \pi x + o(x)$ per $x \to 0$

con esponenti razionali si potrebbero fare conti algebrici:

Es.

$$\underbrace{\sqrt{1+x}}_{A} - \underbrace{1}_{B} = \frac{\overset{A^2-B^2}{x}}{\sqrt{1+x}+1} = x\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2}x + o(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Es: $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^2+8x} - \sqrt[3]{x^2}\right)\sqrt[3]{x}$

$(\infty - \infty)\,\infty$??

RACCOGLIERE LA PP. COMUNE

esercizio a casa

$$\left((x^2+8x)^{1/3} - x^{\frac{2}{3}}\right)x^{1/3} =$$

$$= \left[\left(x^2\left(1+\frac{8}{x}\right)\right)^{1/3} - x^{2/3}\right]x^{1/3} =$$

$$= \left(x^{2/3}\left(1+\frac{8}{x}\right)^{1/3} - x^{2/3}\right)x^{1/3} =$$

$$= x^{2/3}\left(\left(1+\frac{8}{x}\right)^{1/3} - 1\right)x^{1/3}$$

$$= x\left(\left(1+\frac{8}{x}\right)^{1/3}-1\right) = (*)$$

$$\left(1+\frac{8}{x}\right)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}\frac{8}{x}+o\left(\frac{8}{x}\right)$$

per $x \to \infty$

$t = \frac{8}{x}$

Se $x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$

$(1+t)^\alpha \qquad \alpha = \frac{1}{3}$

$$(*) = x\left(\cancel{1}+\frac{1}{3}\frac{8}{x}+o\left(\frac{8}{x}\right)-\cancel{1}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + x\,o\left(\frac{8}{x}\right) = \frac{8}{3} + o(1)$$

cosa vuol dire $o(1)$?

QUESTO LIMITE SI POTEVA FARE ANCHE CON I PRODOTTI NOTEVOLI $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B} = \frac{A-B}{(\sqrt[3]{A})^2+\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+(\sqrt[3]{B})^2}$

Ma . . .

Continua la prossima lez.

questo'altro non si presta a manipolazioni algebriche

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2+8x)^{1/\pi} - (x^2)^{1/\pi}$$

$$(x^2+8x)^{1/\pi} - (x^2)^{1/\pi} = (x^2)^{1/\pi}\left[\left(1+\frac{8}{x}\right)^{1/\pi} - 1\right] =$$

$$= (x^2)^{1/\pi}\cdot\frac{1}{\pi}\frac{8}{x} + (x^2)^{1/\pi} o\left(\frac{1}{x}\right) \quad x\to+\infty \quad =$$

$$\frac{8}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

$$\underset{x>0}{=} \underbrace{8\pi\, x^{\frac{2}{\pi}-1}}_{\text{PARTE PRINCIPALE}} + o\left(x^{2/\pi - 1}\right) \quad x\to+\infty$$

$x\to+\infty$ $\left(\frac{2}{\pi}-1<0\right)$

$\downarrow$

0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(1)}{1} = 0$$ per definizione

se scrivo $o(1)$ vuol dire che è una quantità che tende a 0.

quindi $$\lim \left(\sqrt[3]{x^2 + 8x} - \sqrt[3]{x^2} \right) \sqrt[3]{x} = \frac{8}{3}.$$

Es: $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$f(0) = 0$, $\exists f'(0) = 1$

$\Leftrightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

$x_0 = 0$

$\operatorname{arctg} x = 0 + 1 \cdot x + o(x) = \boxed{x + o(x)}$ per $x \to 0$.

CONDIZIONI DIFFERENZIALI NECESSARIE ALLA MONOTONIA

f é monotona in $(\alpha;\beta)$

$\Longleftrightarrow$ $\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v}$ i rapporti incrementali hanno segno costante $\quad u, v \in (\alpha,\beta)$, $u \neq v$

Prop: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ debolmente crescente in A. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in A$ allora $f'(x_0) \geq 0$.

Se f è debolmente decrescente .... $\Rightarrow f'(x_0) \leq 0$.

dim: $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ma se f è debolmente crescente allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

f mantiene l'ordinamento quindi num. e denomin. sono concordi.

passando al limite si mantiene la disuguaglianza quindi

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 .$$

$\boxtimes$

Oss: Se f è strettamente crescente non posso dedurre che $f'(x_0) > 0$.

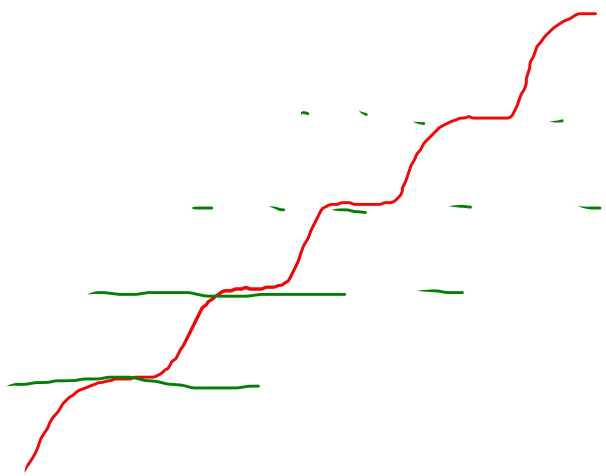
ma solo che $f'(x_0) \ge 0$.

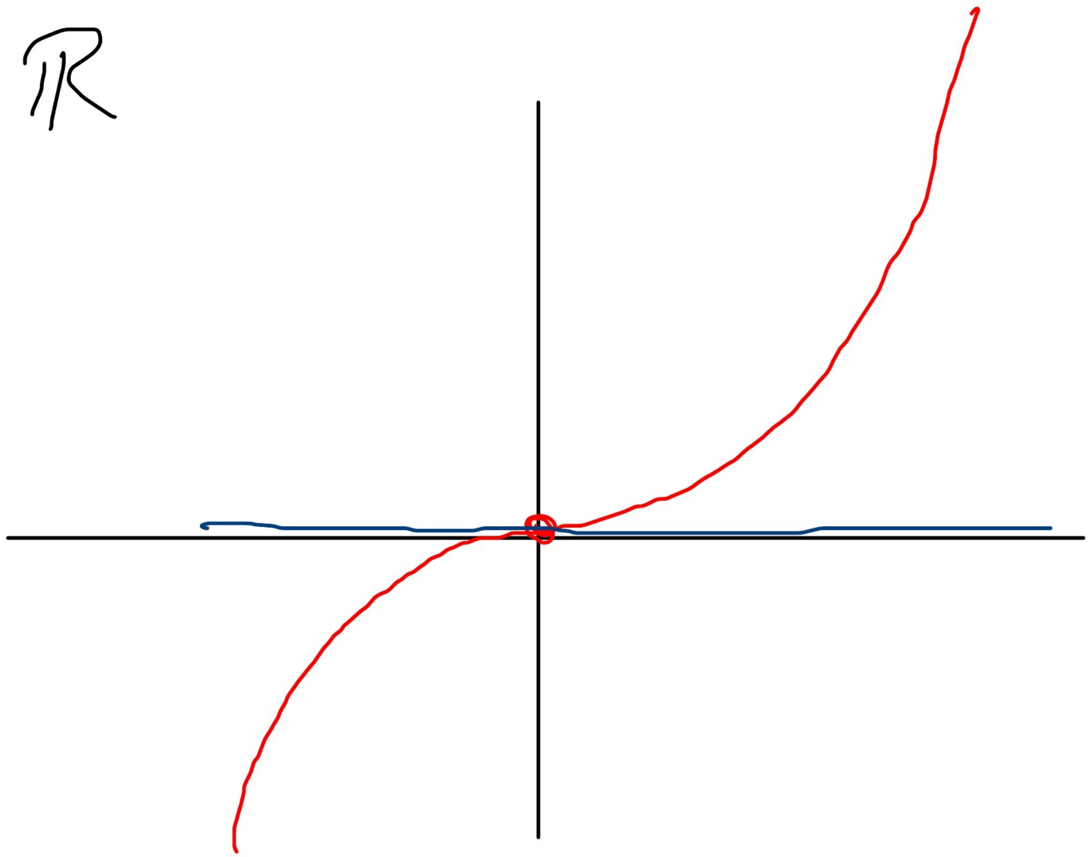
Es: $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2$ e $\underline{\underline{f'(0) = 0}}$

$\downarrow$

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



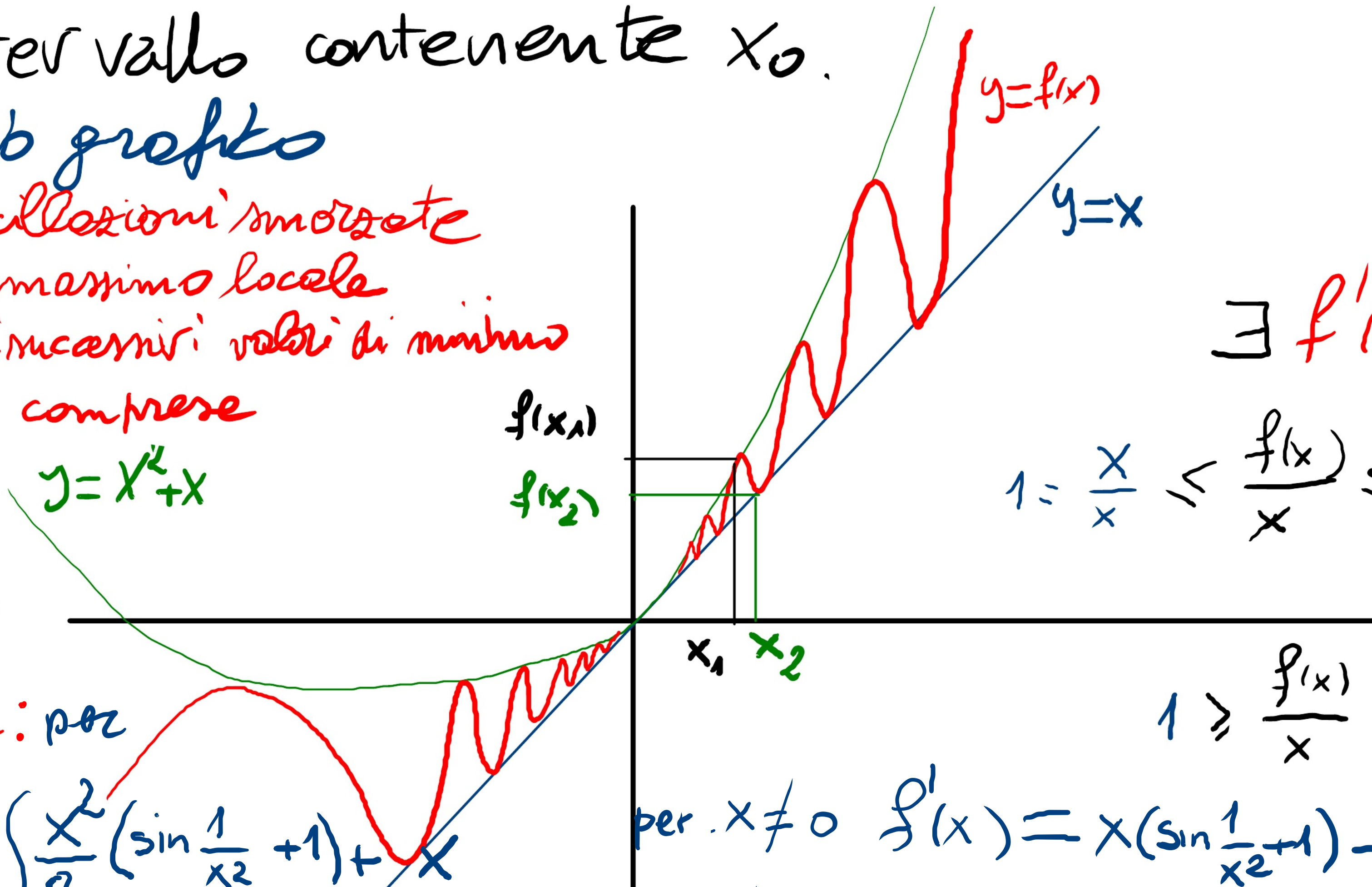


Osservazione:

Vi sono funzioni derivabili in ogni punto di $\mathbb{R}$ per cui anche se $f'(x_0) > 0$ f non è debolmente crescente in alcun intervallo contenente x_0.

Esempio grafico

infinite oscillazioni smorzate con valori di massimo locale maggiori dei successivi valori di minimo locale, e comprese tra due grafici con egual retta tangente: per esempio



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\left(\sin\frac{1}{x^2}+1\right)+x \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$\exists\, f'(0) = 1$

per $x>0$

$$1 = \frac{x}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x^2+x}{x} \to 1$$

per $x<0$

$$1 \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{x^2+x}{x} \to 1$$

per $x \neq 0$ $f'(x) = x\left(\sin\frac{1}{x^2}+1\right) - \frac{1}{x}\cos x + 1$

cambia segno in infiniti intervalli che si accumulano in 0!

Teorema di Fermat.

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$. Se x_0 è un punto interno ad A che è di massimo o di minimo locale per f e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

dim: Se f è derivabile in x_0 allora

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f(x) - f(x_0) \geq 0$

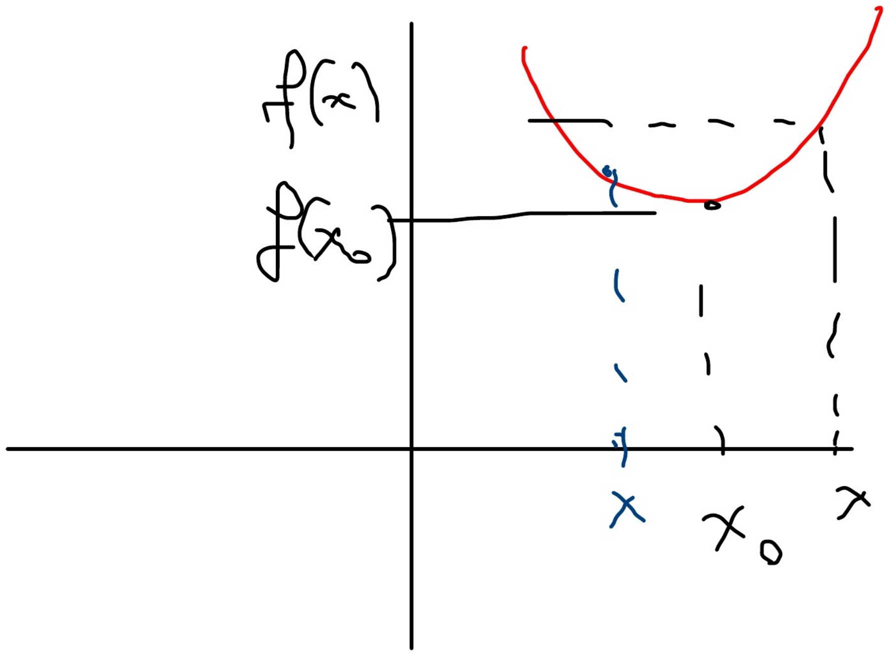
$x - x_0 \geq 0$

supponiamo che x_0 sia punto di minimo locale per f

in un intorno di x_0

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'_+(x_0) \geq 0.$$



$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad f'_-(x_0) \leq 0 .$$

Ma $\quad f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

$$\Rightarrow \quad f'_+(x_0) = 0 , \quad f'_-(x_0) = 0$$

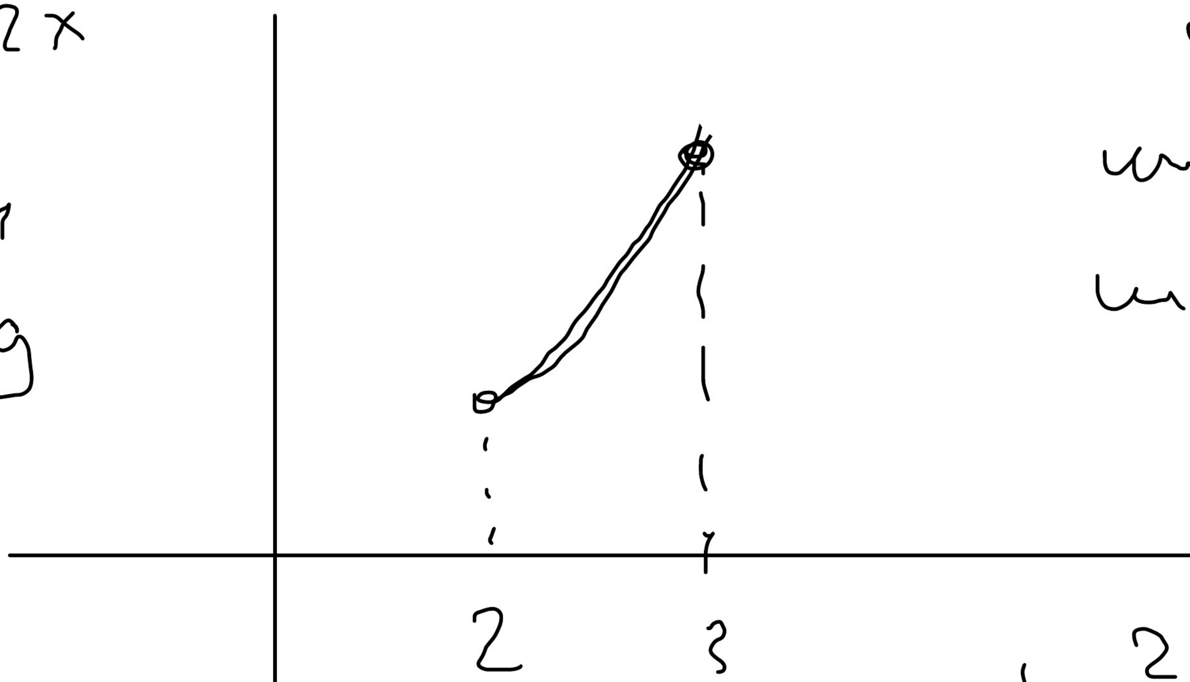
$$\Rightarrow \quad \underline{f'(x_0) = 0} .$$

Oss: Se il punto non è **interno** al dominio $\Rightarrow$ il teorema non è necessariamente valido.

$f'(x) = 2x$

$f'(2) = 4$

$f'(3) = 9$



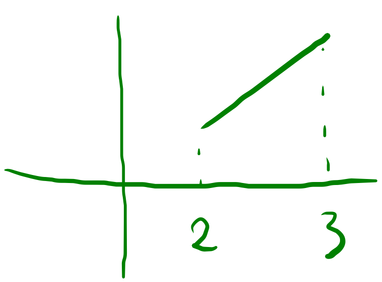
$f(x) = x^2$

$\min f = f(2) = 4$

$\max f = f(3) = 9$

$f : [2,3] \to \mathbb{R}$

$2, 3$ non sono punti interni.

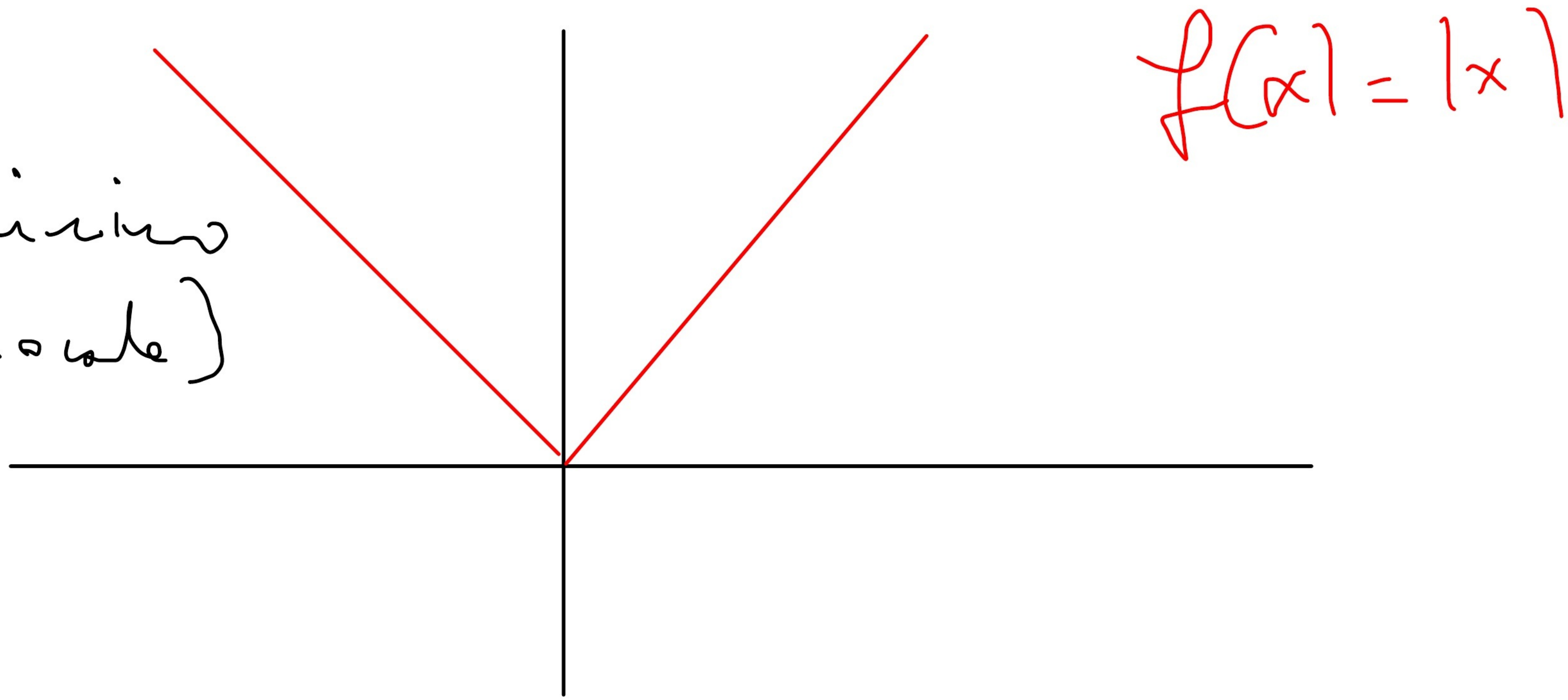


Oss: L'ipotesi di derivabilità è necessaria.

Quindi possono esserci punti di minimo o di massimo locale dove la derivata non si annulla (perché non esiste).

$x=0$ è punto di minimo assoluto (e locale)

ma $f'(0) \nexists$.



Ricetta

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ I intervallo chiuso, limitato, f cont.

dove cercare i punti di max e di min assoluti

1) nei punti interni ad I ove f è derivabile con derivata nulla
2) agli estremi reali dell'intervallo
3) nei punti interni ad I ove f NON È DERIVABILE

1) $x_1^1 \dots x_p^1$ $\qquad$ 2) $x_1^2 \quad x_2^2$ $\qquad$ 3) x_i^3 anche infiniti

se questi sono finiti $x_1^3 \dots x_q^3$

MIN $f(x_j^i)$ $\quad$ i, j

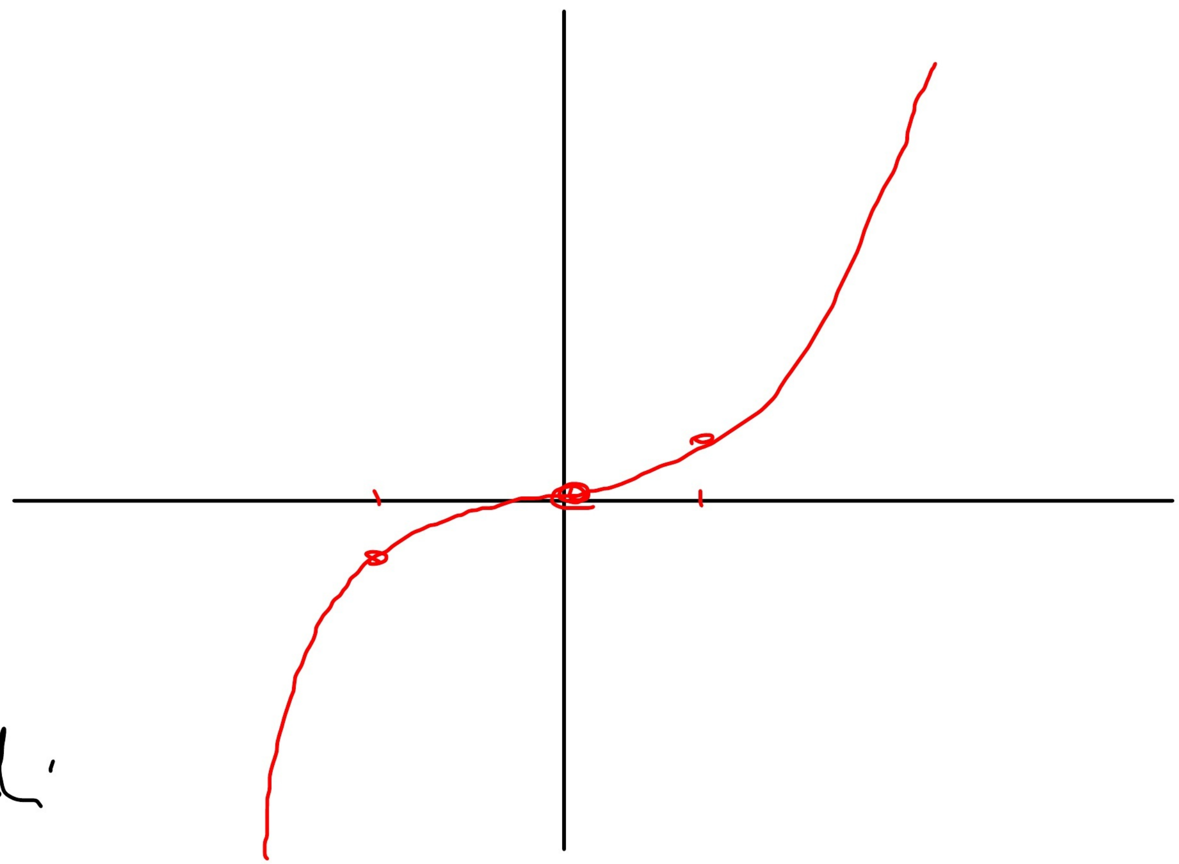
MAX $f(x_j^i)$ $\quad$ i, j

$\boxed{\text{Oss}}$: Il teorema è condizione necessaria per un max o min locale ma non suff.

Es: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$



ma $x = 0$ non è né punto di max né di min locale