Fattoriale

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ definiamo

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$

prodotto dei primi n numeri naturali

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = (1 \cdot 2 \cdot 3) 4 = 6 \cdot 4 = 24$

$5! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot 5 = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$

$$(n+1)! = n!\,(n+1)$$

$$\underbrace{[1 \cdot 2 \cdots n]}_{n!}(n+1) = n!\,(n+1)$$

$$0! = 1 \quad \text{per definizione}$$

Sommatorie.

numeri reali indicizzati con un numero naturale

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ $\qquad a_j \in \mathbb{R} \quad j \in \mathbb{N}.$

$$a_j = \frac{1}{j} \qquad a_1 = \frac{1}{1} \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3}$$

oppure

$$a_j = \sqrt{j} \qquad a_1 = \sqrt{1} \quad a_2 = \sqrt{2} \quad a_3 = \sqrt{3} \quad \ldots$$

Sommatoria degli a_j per j che va da m ad n dove $m, n \in \mathbb{N}$ $m \leq n$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

Es: $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

Es: $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} j^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

$$\sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j} = \sum_{k=3}^{5} \frac{1}{k} = \underset{k=3}{\frac{1}{3}} + \underset{k=4}{\frac{1}{4}} + \underset{k=5}{\frac{1}{5}}$$

Formula di Taylor

f derivabile nel punto $x_0 \in (a,b)$.

allora

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{polinomio di grado 1}} + \overbrace{o(x-x_0)}^{\text{resto}}$$

per $x \to x_0$

f differisce dal polinomio per un resto che è infinitesimo rispetto a $x - x_0$ cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} = 0.$$

posso precisare meglio la quantità $o(x-x_0)$?

SÌ se f è derivabile più volte nel punto x_0.

Formula di Taylor con resto di Peano

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. Se f è derivabile n volte in x_0 e almeno $n-1$ volte nel resto dell'intervallo (a,b) (cioè in $(a,b)\setminus\{x_0\}$), allora esiste unico un polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ e una funzione $R_n(x)$ t.c.

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

e $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ per $x\to x_0$.

Il polinomio $P_n(x)$ ha la seguente forma

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

cioè

$$P_n(x)=\underbrace{f(x_0)}_{j=0}+\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{j=1}+\underbrace{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}_{j=2}+\underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3}_{j=3}+\dots+\underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{j=n}.$$

Oss: Il grado del polinomio è correlato all'ordine in infinitesimo del resto.

P_n è di grado n e $R_n = o\left((x-x_0)^n\right)$.

$$f(x) - P_n(x) = \underbrace{o\left((x-x_0)^n\right)}$$

differenza tra la funzione e il polinomio che la approssima.

Formula di Taylor con il resto di Lagrange

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ f derivabile $n+1$ volte in $(a,b) \setminus \{x_0\}$ e n volte in x_0.

Allora $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

e esiste z compreso tra x e x_0 t.c.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)\,(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Esempi di formula di Taylor

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x \quad \dots \quad f^{(j)}(x) = e^x$

$\forall j \in \mathbb{N}.$

La calcolo in $x_0 = 0$.

$f(0) = e^0 = 1 \qquad f'(0) = e^0 = 1 \quad \dots \quad f^{(j)}(0) = 1$

$$e^x = \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}\right] + o(x^n) \checkmark = \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}(x-0)^j\right] + o(x^n)$$

$f^{(j)}(0) \to 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

ordine 2

$$e^x = 1 + x + \underbrace{\boxed{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}}_{R_2(x)}$$

$$e^x = 1 + x + \underbrace{\boxed{o(x)}}_{R_1(x)}$$

Oss: $R_2(x)$ in particolare è $o(x)$

$$\frac{R_2(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} = \frac{x}{2} + o(x) \longrightarrow 0$$

se $x \to 0$.

$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x \qquad f'''(x) = -\cos x$

$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = -1.$

$$\sin x = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + R_n(x)$$

$$\sin x = 0 + 1 \cdot \frac{x}{1} + 0 \cdot \frac{x^2}{2} - 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$= \underbrace{\boxed{x - \frac{x^3}{6}}}_{P_3(x)} + \underbrace{o(x^3)}_{R_3(x)}. \qquad \text{ordine } n = 3.$$

ordine 4

$$\sin x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} - 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$= \underbrace{\boxed{x - \frac{x^3}{6}}}_{P_4(x)} + \underbrace{o(x^4)}_{R_4(x)}$$

$P_3(x) = P_4(x)$ in questo caso.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \leftarrow \text{ ordine } 3$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad \leftarrow \text{ ordine } 4$$

sono vere entrambe ma la seconda è più precisa.

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\sin x = x + o(x^2) \quad \leftarrow \text{ è più precisa}$$

$$\sin x = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j \, x^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) + o\left(x^{2n+2}\right)$$

solo potenze dispari

$n = 2$

$$\frac{(-1)^0 \, x^{2\cdot 0+1}}{(2\cdot 0+1)!} + \frac{(-1)^1 \, x^{2\cdot 1+1}}{(2\cdot 1+1)!} + \frac{(-1)^2 \, x^{2\cdot 2+1}}{(2\cdot 2+1)!} + o\left(x^{2\cdot 2+2}\right)$$

$$= x^{1} - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + o\left(x^{6}\right)$$

$$\cos x = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} \right) + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o\left(x^7\right) \rightarrow \text{potenze pari}$$

$$\log(1+x) = \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}\right) + o(x^n)$$

non è fattoriale

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \qquad \boxed{n=4}$$

segni alternati

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$$

$$\operatorname{arctg} x = \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \right) + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8)$$

solo gradi dispari

non c'è il fattoriale.

Binomiale

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^{\alpha} = \boxed{1 + \alpha x} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \boxed{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}} x^3 +$$

$$+ \ldots \quad + \boxed{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}} x^n + o(x^n)$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$

ordine 2

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2) =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$\boxed{\alpha = -1}$ $\qquad (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - 1 \cdot x + \frac{(-1)(-2)}{2!} x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 - x + \frac{2}{2} x^2 - \frac{3!}{3!} x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$x = -t \qquad \frac{1}{1-t} = 1 - (-t) + (-t)^2 - (-t^3) + o(t^3)$

$$= 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3)$$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^n + o(t^n)$$

Es: $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1}$$

$$\sin x = x + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1} = \frac{\cancel{x} + o(x^2) - \cancel{x}}{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x) - (\cancel{x} + o(x)) - \cancel{1}}$$

$$= \frac{o(x^2)}{o(x)} = ??$$ indeterminato.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1} = \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x}}{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \cancel{1}}$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2 + o(x^2)} =$$

divido num e denom. per x^2

$$= \frac{-\frac{x}{6} + o(x^2)}{1 + o(1)} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0$$

Es: $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4}$

$\sin t = t + o(t^2)$ $\quad t = x^2$

$(\sin x)^2 = (x + o(x^2))^2 = x^2 + \underline{2x\,o(x^2)} + (o(x^2))^2 =$

$= x^2 + o(x^3) + o(x^4) = x^2 + o(x^3)$

$\sin(x^2) = x^2 + o(x^4)$

$$\frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4} = \frac{\cancel{x^2} + o(x^3) - \cancel{x^2} + o(x^4)}{x^4}$$

$$= \frac{o(x^3)}{x^4} = \frac{o(x^3)}{x^3} \cdot \frac{1}{x}$$

0

$\pm\infty$ da destra o da sinistra

??

indeterminato.

aumentare il grado dell'approssimazione

dove migliorare $(\sin x)^2$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$(\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + (o(x^4))^2 +$$

$$-2x \cdot \frac{x^3}{6} + 2x\, o(x^4) - 2\frac{x^3}{6}\, o(x^4) =$$

$$= x^2 + \frac{x^6}{36} + o(x^8) - \frac{x^4}{3} + o(x^5) + o(x^7) =$$

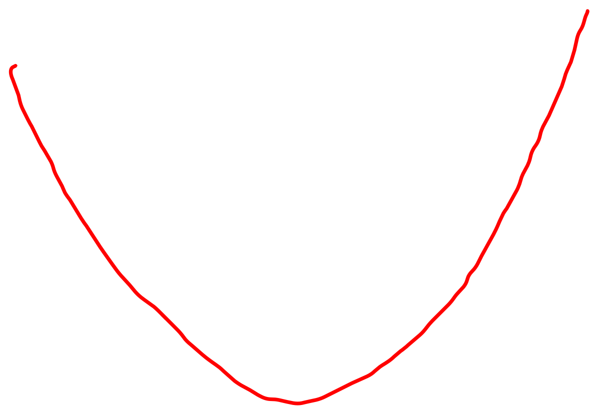
$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

$$\frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4} = \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) - \left(x^2 + o(x^4)\right)}{x^4}$$

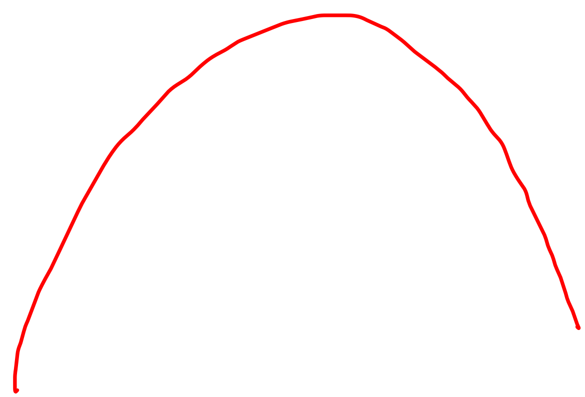
$$= \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} - \cancel{x^2} + o(x^4)}{x^4} = \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{3} + o(1)}{1} \longrightarrow -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}.$$

Convessità



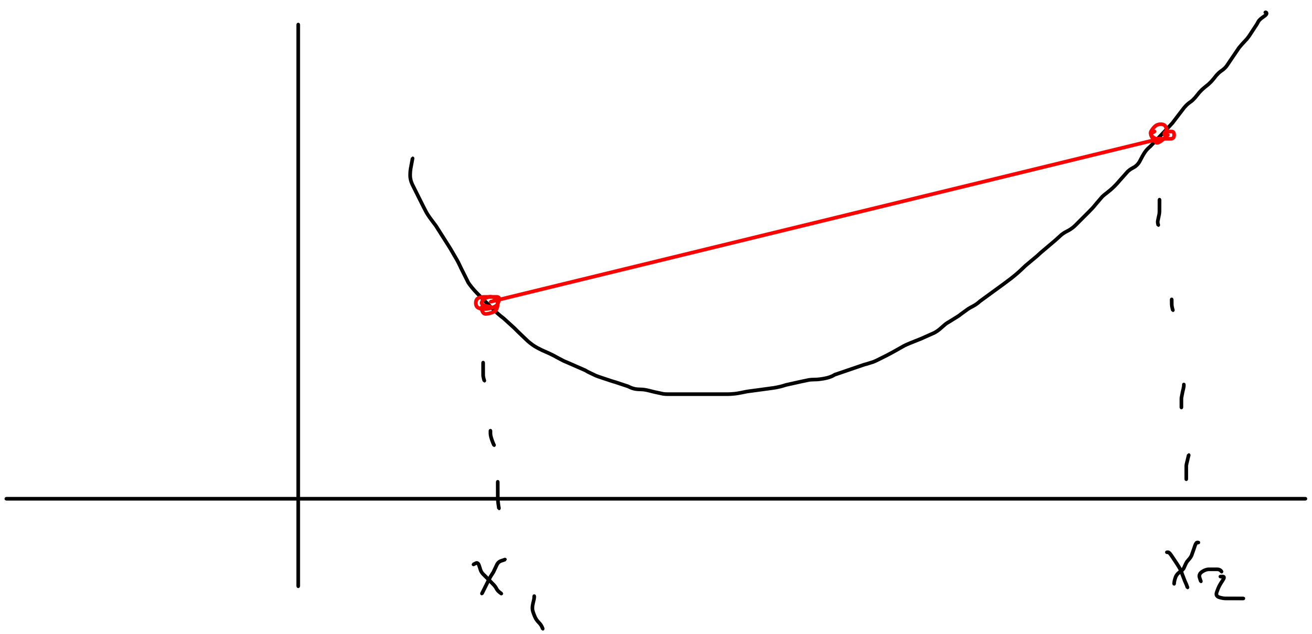
convessa



concava.

Def: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo $f: I \to \mathbb{R}$

f si dice convessa in I se, presi due punti qualsiasi sul grafico di f, il segmento che li unisce è sopra il grafico di f.

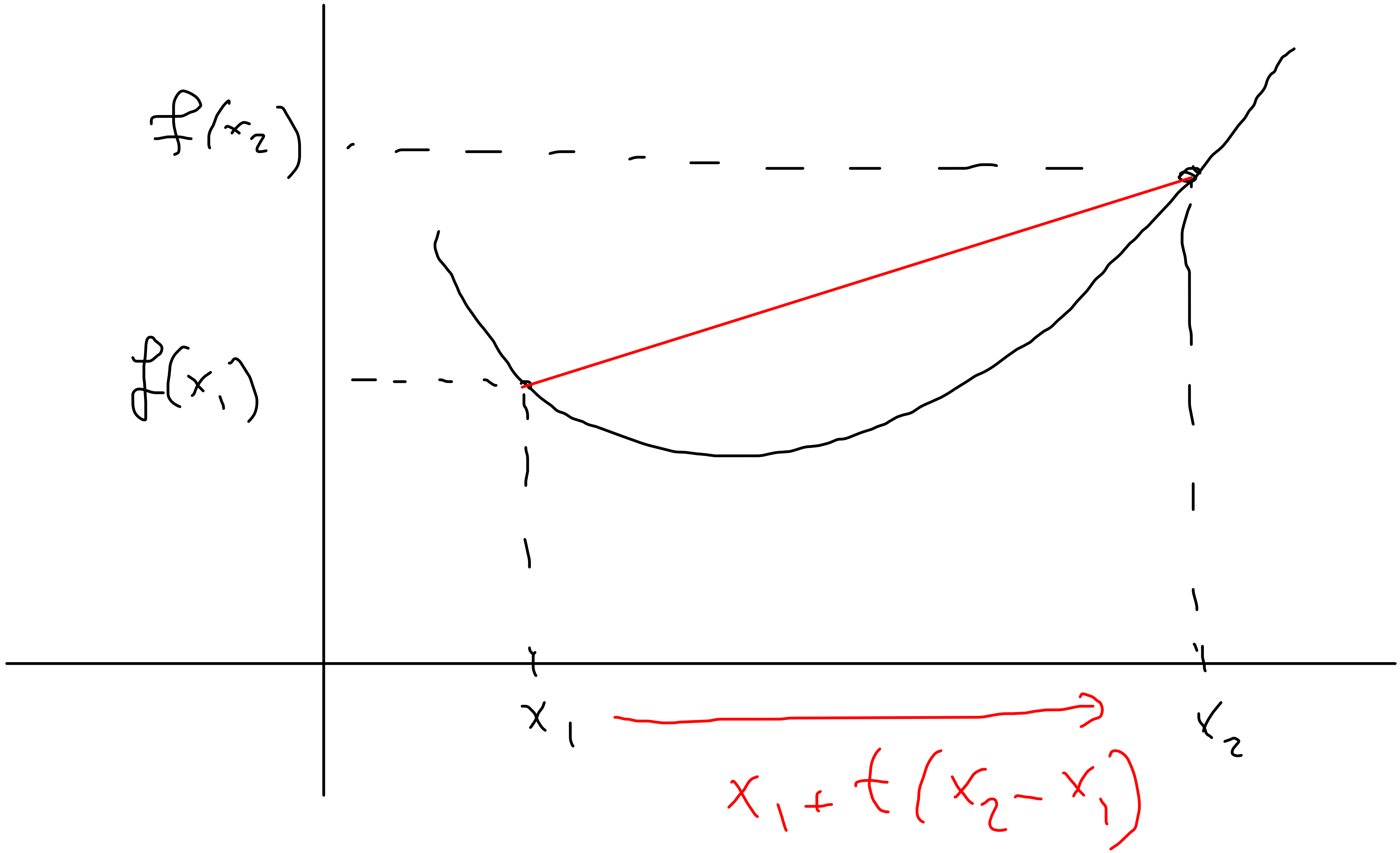


In formule

f si dice convessa in I se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ e $\forall\, t \in (0,1)$ risulta

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t\,(f(x_2) - f(x_1))$$

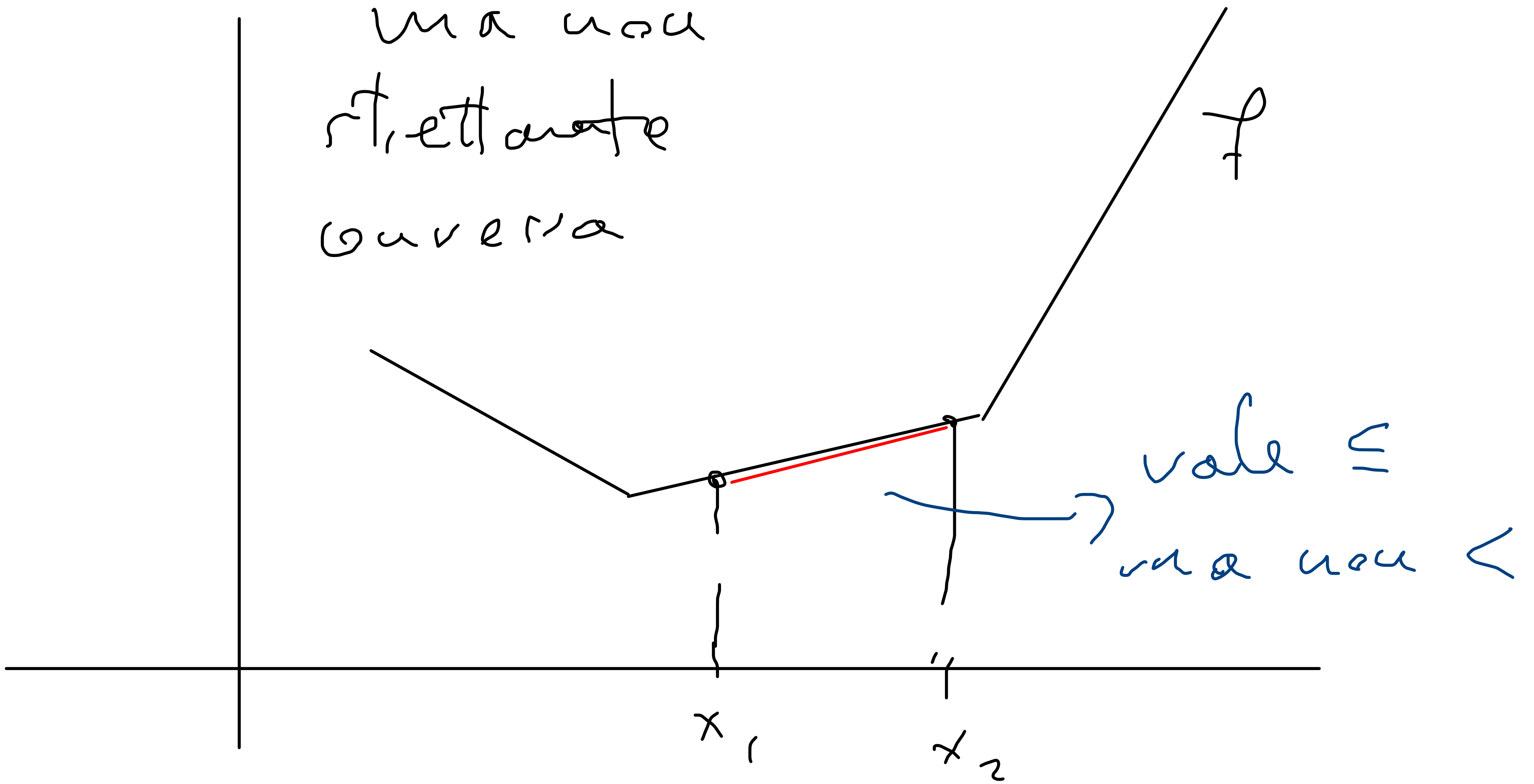
se la stessa disuguaglianza vale con $<$ (minore stretto) allora f si dice strettamente convessa.



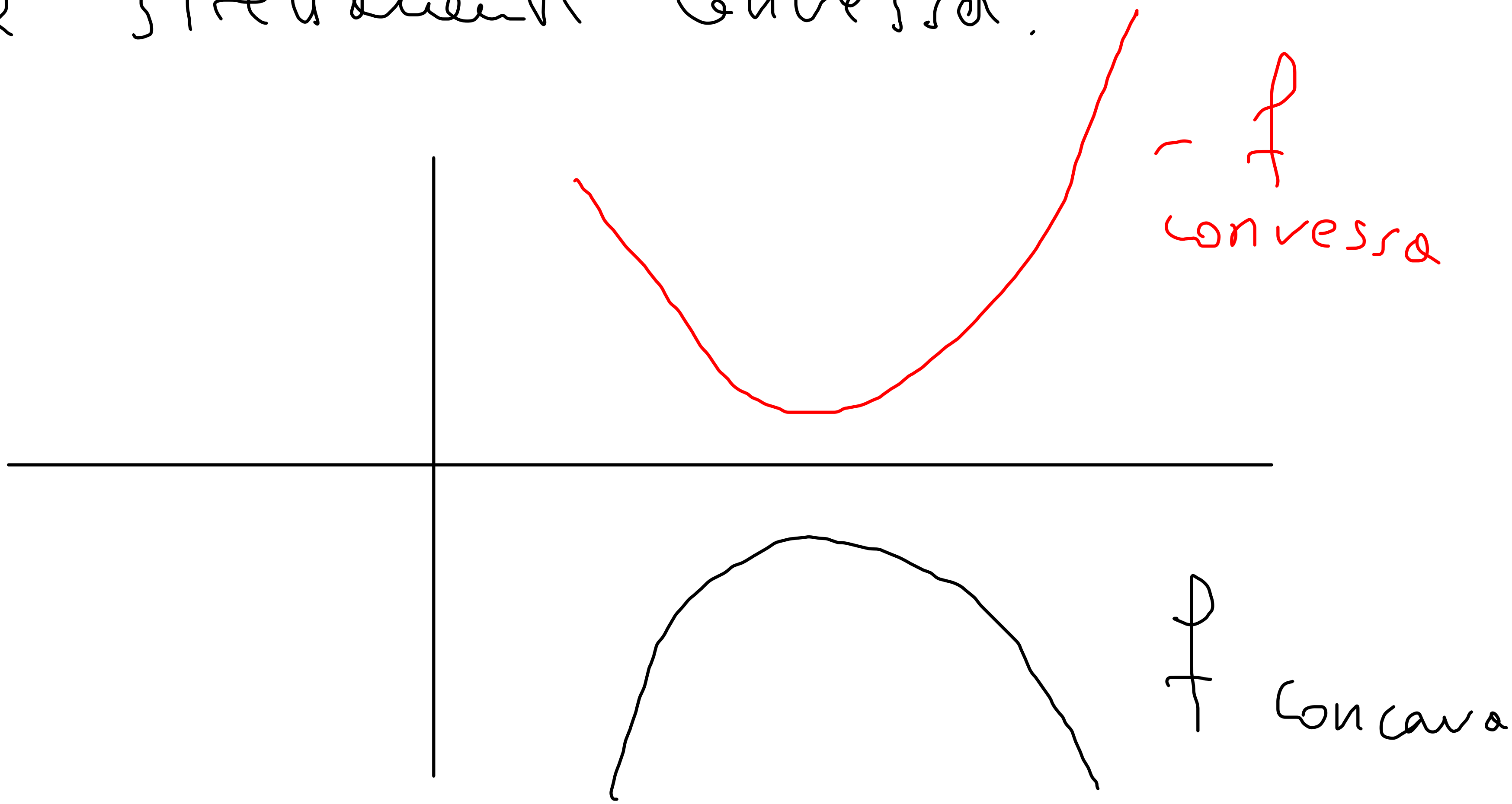
$f(x_2)$
$f(x_1)$
x_1
x_2
$x_1 + t(x_2 - x_1)$

f è convessa

ma non strettamente convessa



Def: f si dice concava se $-f$ è convessa. Strettamente concava se $-f$ è strettamente convessa.



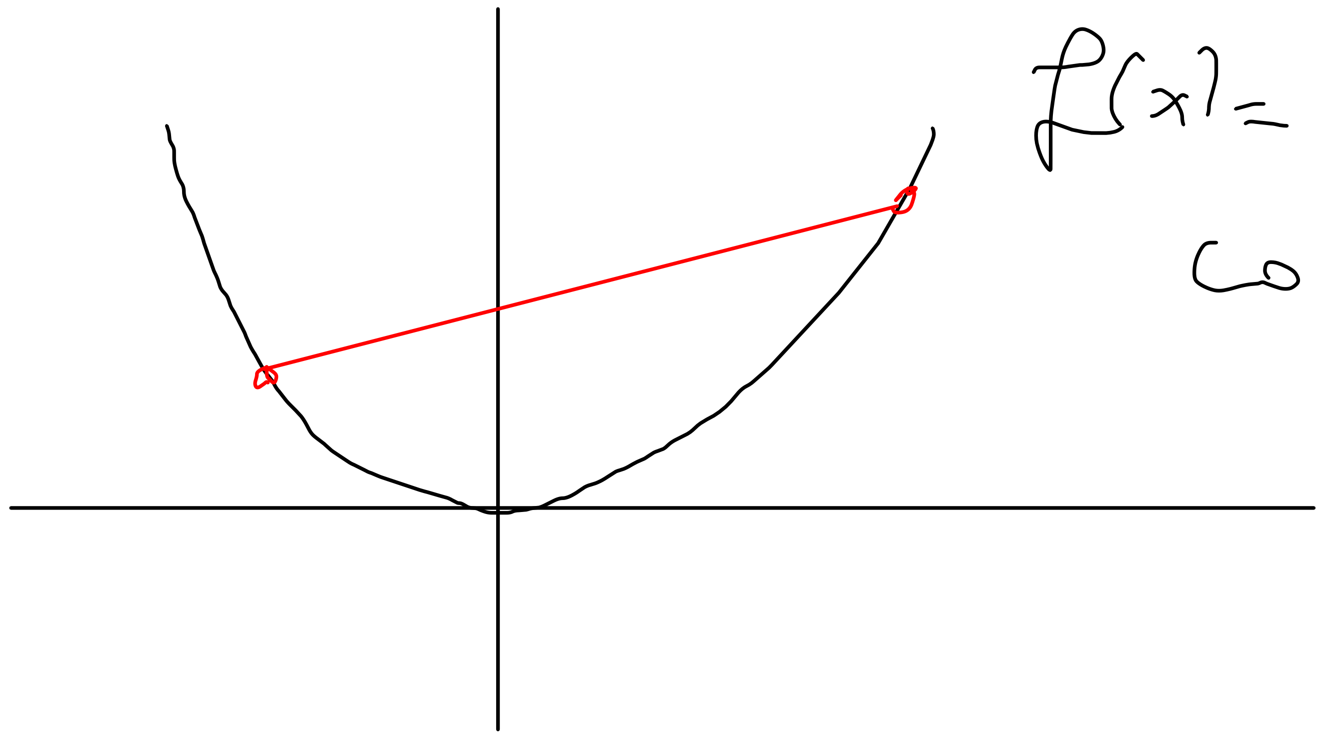
In formula per una funzione concava vale

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \geq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$

<u>Es</u>: $f(x) = x^2$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

è convessa

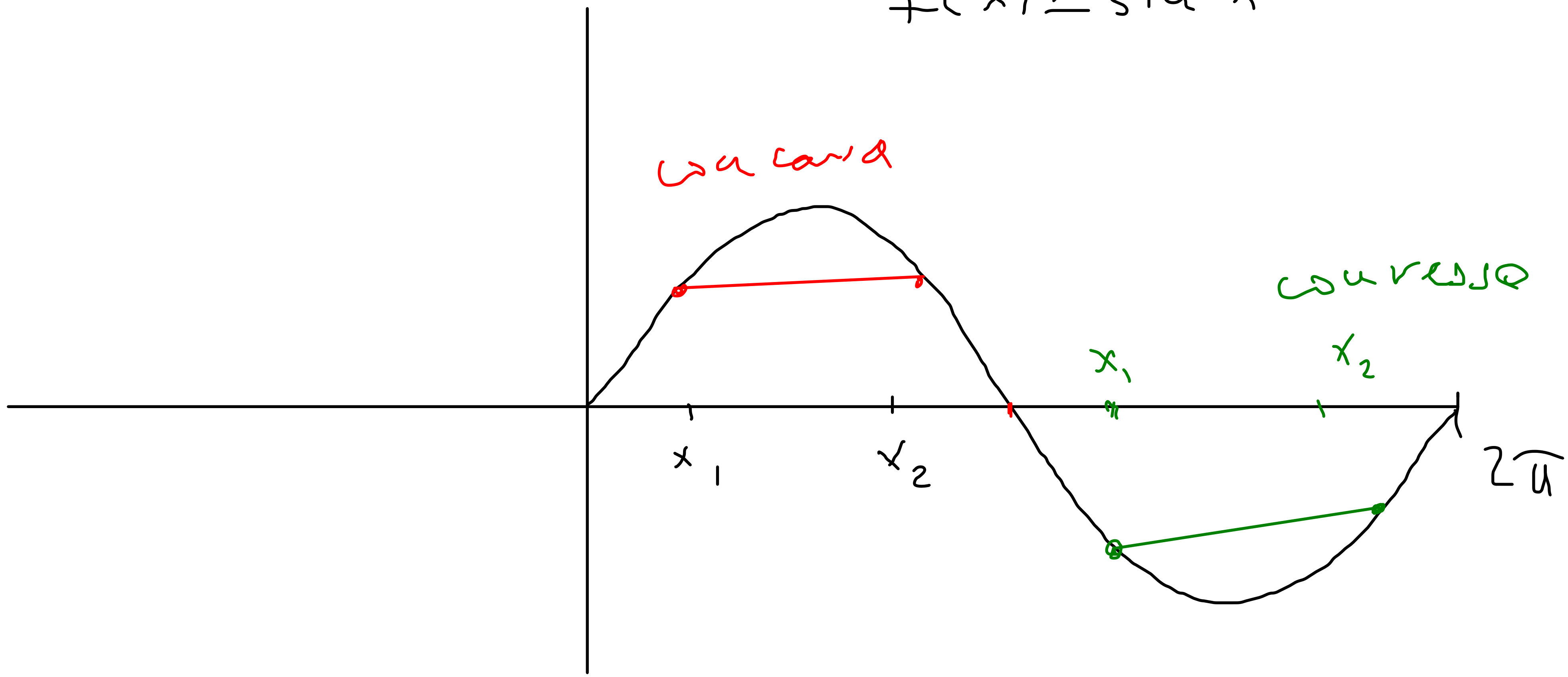
$f(x) = -x^2$ è concava.



$f(x) = x^2$

convessa

$f(x) = \sin x$



f non è né concava né convessa sull'intervallo $[0, 2\pi]$.

Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte. Sono equivalenti:

1) f è convessa (strettamente convessa)
2) f' è debolmente crescente (strett. crescente)
3) $f'' \geq 0$ $(f'' > 0)$

Es: $f(x) = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\to f$ è convessa (strettamente) in $\mathbb{R}$.

Es: $f(x) = e^x$ $\quad f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$

sempre $\Rightarrow f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa.

Es: $f(x) = \log x$ $\quad f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ $\quad \forall x > 0$

$\Rightarrow f$ è strettamente concava

Cosa vuol dire che f' è crescente?

Il coeff. angolare della tangente cresce

"La tangente ruota in senso antiorario"

Es: $f(x) = \sin x \quad f: [0, 2\pi]$.

$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x$

$-\sin x \geq 0 \iff \sin x \leq 0 \iff x \in [\pi, 2\pi]$

$f''(x) \geq 0 \iff x \in [\pi, 2\pi]$

$f''(x) \leq 0 \iff x \in [0, \pi]$