Domanda 1: verifica della continuità in $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x+x^3}{(x-1)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

$f(0)=0$ quindi f è continua a sinistra in $x=0$.

Domanda 2: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$

La quantità $\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$ è limitata, quindi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \cdot \text{limitata} = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty\left(1-\cos\frac{1}{\infty}\right) = \infty(1-\cos 0) = \infty(1-1) \quad \text{indeterminato}$$

usiamo lo sviluppo di Taylor del coseno

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t\to 0.$$

Con la sostituzione $t=\frac{1}{x}$, che è ammissibile perché se $x\to\infty$ $t=\frac{1}{x}\to 0^+$, otteniamo

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{per } x\to\infty$$

quindi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\left(1-\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Osserviamo inoltre che $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (0,+\infty)$ dato che $\cos\frac{1}{x} \leq 1$ quindi $1-\cos\frac{1}{x} \geq 0$.

Allora, per il teorema di Weierstrass generalizzato applicato a f (che è continua) sulla semiretta $(0,+\infty)$, f ha massimo.

Domanda 3 : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^5-3)\,e^{1-x^3}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ((-\infty)^5-3)\,e^{1-(-\infty)^3} = (-\infty-3)\,e^{1+\infty} = (-\infty)\,e^{+\infty} =$$

$$= -\infty\cdot(+\infty) = -\infty.$$ quindi f non ha minimo.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (\infty-3)\,e^{1-(\infty)^3} = \infty\, e^{-\infty} = \infty\cdot 0 = ?$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5-3}{e^{x^3-1}} = 0$$ per gerarchia degli infiniti.

Inoltre $f(x)\geq 0 \iff (x^5-3)\,e^{1-x^3} \geq 0 \iff x^5-3\geq 0 \iff x^5 \geq 3$

$\iff x \geq \sqrt[5]{3}$, quindi esiste almeno un punto dove $f\geq 0$.

Per Weierstrass generalizzato, f ha massimo (f è continua).

Domanda 4: $f : \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(\log(\operatorname{tg} x))$

$\operatorname{tg} x : \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente

$\log t$ è strettamente crescente in tutto il suo dominio

quindi f è strettamente crescente, pertanto iniettiva.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \log\left(\log\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)\right) = \log(\log(1)) = \log 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \log\left(\log\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\right)\right) = \log(\log(+\infty)) = \log(+\infty) = +\infty$$

quindi, per il teorema dei valori intermedi, f è surgettiva.

(f è continua).

Domanda 5: $f(x) = x^4 \left(\log(x^4+1)+1\right)$

$$f'(x) = 4x^3 \left(\log(x^4+1)+1\right) + x^4 \cdot \frac{1}{x^4+1} \cdot 4x^3 =$$

$$= 4x^3 \left(\log(x^4+1) + 1 + \frac{x^4}{x^4+1} \right) =$$

$$= 4x^3 \left(\log(x^4+1) + \frac{2x^4+1}{x^4+1} \right)$$

Domanda 6:

$$\lim_{x\to 0} x\left(\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)=0\cdot \text{limitata}=0$$

Domanda 7: $f:(1,2]\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\frac{1}{1-x}}\log\frac{x}{2}$.

f è continua.

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=e^{\frac{1}{1-1^+}}\log\frac{1}{2}=e^{\frac{1}{0^-}}(-\log 2)=e^{-\infty}(-\log 2)=0^-$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=e^{\frac{1}{1-2}}\log\frac{2}{2}=e^{-1}\cdot\log 1=0$$

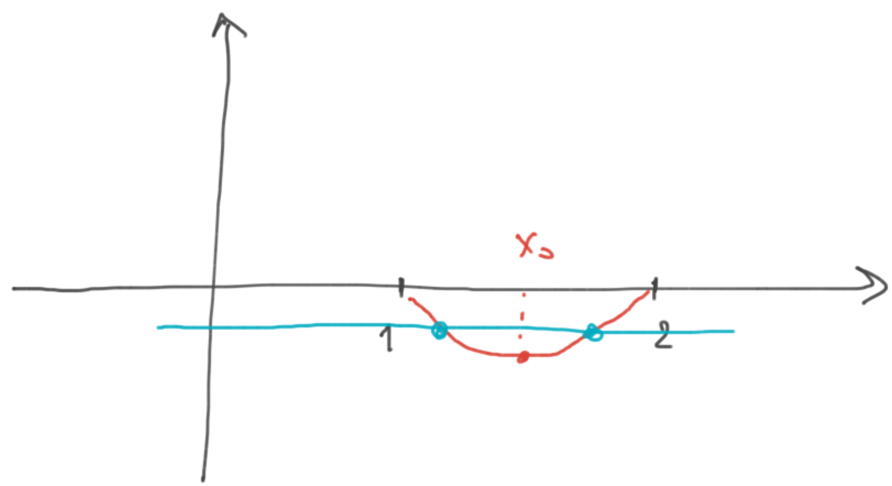
Inoltre $f(x)\le 0 \iff e^{\frac{1}{1-x}}\log\frac{x}{2}\le 0 \iff \log\frac{x}{2}\le 0$

$\iff \frac{x}{2}\le 1 \iff x\le 2$, quindi $f(x)\le 0$ $\forall x\in(1,2]$

Per il teorema di Weierstrass generalizzato f ha minimo, quindi non è surgettiva.

Osserviamo anche che bastava dire che $f \leq 0$ implica la non surgettività.

Se indichiamo con x_0 il punto di minimo, applicando il teorema dei valori intermedi agli intervalli $(1, x_0]$ e $[x_0, 2]$ otteniamo che f non è iniettiva.



Domanda 8 : $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}\left(\log(1+x) - \log x\right)$

f è definita per $x>0$ e $x\neq 1$ quindi in $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-1}{-1}\left(\log 1 - \log 0\right) = 1\left(0-(-\infty)\right) = +\infty$$

quindi c'è l'asintoto verticale di equazione $x=0$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1-1}{1-1}\left(\log(2) - \log 1\right) = \frac{0}{0}\cdot \log 2 = ?$$

$x^3-1 = (x^2+x+1)(x-1)$

$x^2-1 = (x+1)(x-1)$

quindi

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x+1)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}\left(\log(1+x) - \log x\right) = \frac{3}{2}\log 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}(\infty - \infty) \;.\; = ?$$

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}\left(\log\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = \frac{x^3-1}{x^2-1}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Ricordiamo che $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$

e sostituiamo $t = \frac{1}{x}$ dato che $x \to \infty \Rightarrow t = \frac{1}{x} \to 0$

Quindi $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3-1}{x^2-1}\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3-1}{(x^2-1)\cdot x}(1+o(1))$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3-1}{x^3-x}(1+o(1)) = 1\,(1+0) = 1.$$

Quindi f ha un asintoto orizzontale di equazione

$y = 1$ per $x \to \infty$.

Domanda 9: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}(3+\cos x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{+\infty}(3+\nexists) = ?$$

osserviamo che $3+\cos x \geq 3-1=2$ quindi

$f(x) \geq e^{-x}\cdot 2$ e che $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\cdot 2 = +\infty$

quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ per il th. dei Carabinieri.

Ne segue che f non ha massimo.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = e^{-\infty}\cdot \text{limitata} = 0\cdot\text{limitata} = 0$.

Dal fatto che $f(x) \geq e^{-x}\cdot 2$ otteniamo che $f(x)>0$ $\forall x$

Quindi $\inf(f)=0$ e f non ha minimo perché $f(x)\neq 0$ $\forall x$.

<u>Domanda 10</u>: $f(x) = x + e^{-x}$

f è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ ed è continua.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty + e^{+\infty} = ? \quad \text{Sostituiamo } t = -x$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to +\infty} -t + e^{t} = \lim_{t \to \infty} e^{t}\left(1 - \frac{t}{e^{t}}\right) = \infty(1-0) = \infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{t \to +\infty} 1 + \frac{e^{t}}{t} = +\infty$$

quindi non c'è né asintoto orizzontale né obliquo per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} x + e^{-x} = +\infty + e^{-\infty} = +\infty + 0 = +\infty.$$

quindi non c'è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} 1+\frac{e^{-x}}{x} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 1 + \frac{e^{-\infty}}{\infty} = 1 + \frac{0}{\infty} = 1+0 = 1 = m$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \cancel{x} + e^{-x} - \cancel{1\cdot x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\infty} = 0 = q$$

Quindi $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to \infty$.