Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Esercitazione 12 novembre 2020

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\log(x)}{(x-1)^2}$$

determinandone insieme di definizione, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, estremi inferiore e superiore. Determinare l'esistenza di punti di massimo o minimo locale. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Data la presenza di $\log(x)$ e del denominatore $(x-1)^2$, la funzione risulta definita sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \neq 1\}$. Quindi la funzione non si annulla mai, poiché l'unico zero del numeratore è $x = 1$ che però non appartiene al dominio della funzione. Calcoliamo ora i limiti agli estremi del dominio. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0,$$

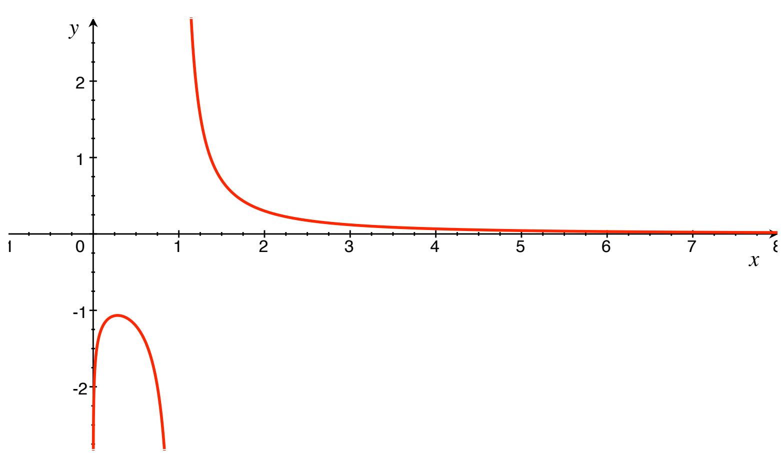
da cui deduciamo l'esistenza dell'asintoto verticale $x = 1$ e dell'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$. Inoltre, $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$. La derivata della funzione vale

$$f'(x) = \frac{x - 2x\log(x) - 1}{x(x-1)^3}.$$

Al fine di determinare l'esistenza di punti di massimo e minimo locale, studiamo la derivata prima ed in particolare cerchiamo punti in cui essa si annulli. La derivata si annulla laddove il suo numeratore si annulla, ovvero negli eventuali punti x_* tali che $g(x) = 0$ ove $g(x) = x - 2x\log(x) - 1$. La funzione g ammette ovviamente lo zero $x_* = 1$, punto che pero' non appartiene al dominio di f. Calcoliamo allora

$$g'(x) = -1 - 2\log(x)$$

che si annulla per $0 < x = 1/\sqrt{e} < 1$, è positiva per $x < 1/\sqrt{e}$ ed è negativa per $x > 1/\sqrt{e}$. Di conseguenza, il punto $x = 1/\sqrt{e}$ è un punto di massimo per g. Poiché $\lim_{x\to 0} g(x) = -1$, g è crescente sull'intervallo $(0, 1/\sqrt{e})$ e $g(1/\sqrt{e}) = 2/\sqrt{e} - 1 > 0$, possiamo dedurre che esiste un punto $0 < x_* < 1/\sqrt{e} < 1$ tale che $g(x_*) = 0$. Ricordando che $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^3}$, abbiamo che $f'(x_*) = 0$, mentre $f' > 0$ per $x < x_*$ e $f' < 0$ per $x > x_*$. Quindi la funzione f ha un solo punto di massimo locale nel punto $0 < x_* < 1$, è crescente sull'intervallo $(0, x_*)$, decrescente su $(x_*, 1)$ e ancora decrescente su $(1, +\infty)$.



Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x) = 2\,x + \sqrt{x^2 - 1}$$

determinarne insieme di definizione, asintoti, intervalli di monotonia, massimi e minimi (specificando quali sono relativi e quali assoluti), convessità e tracciarne un grafico qualitativo.

Soluzione

La funzione è definita in $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2\,x+\sqrt{x^2-1})\,(-2\,x+\sqrt{x^2-1})}{(-2\,x+\sqrt{x^2-1})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3\,x^2-1}{(-2\,x+\sqrt{x^2-1})}=-\infty.$$

Quindi non ci sono né punti di massimo né punti di minimo assoluti. Risulta inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-3\,x=\lim_{x\to+\infty}-x+\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-x+\sqrt{x^2-1})\,(x+\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{(x+\sqrt{x^2-1})}=0$$

Quindi $y=3\,x$ è asintoto obliquo destro. Analogamente si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)-x=0,$$

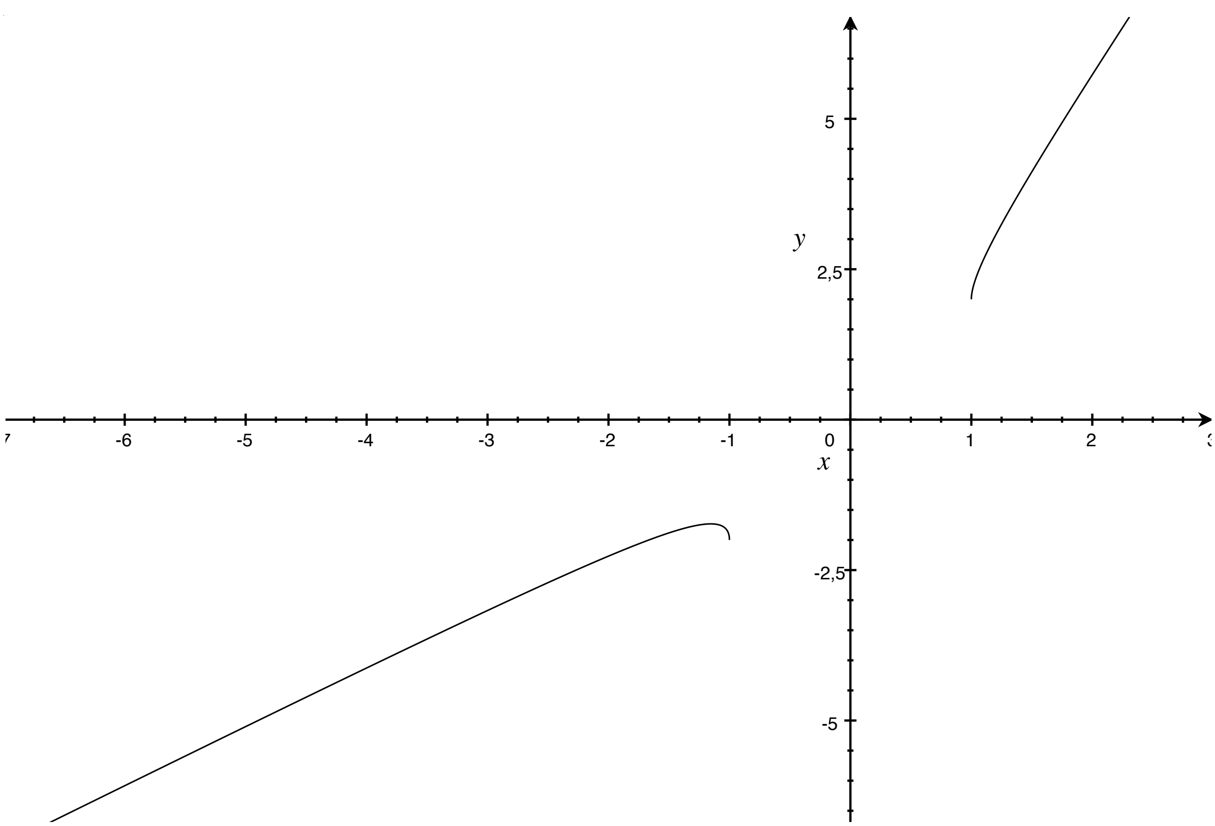
quindi $y=x$ è asintoto obliquo sinistro. Per determinare eventuali massimi o minimi locali calcoliamo

$$f'(x)=2+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Quindi $f'(x)=0$ per $x=-\sqrt{4/3}$ e $f'(x)>0$ su $(-\infty,-\sqrt{4/3})$ e $(1,+\infty)$. La funzione risulta dunque crescente su $(-\infty,-\sqrt{4/3})$ e $(1,+\infty)$, mentre risulta decrescente su $(-\sqrt{4/3},-1)$. La funzione ha un punto di massimo relativo in $x=-\sqrt{4/3}$. Inoltre ha due punti di minimo relativo in $x=1$ e in $x=-1$, nei quali la funzione non è derivabile. In particolare $\lim\limits_{x\to1} f'(x)=+\infty$ mentre $\lim\limits_{x\to-1} f'(x)=-\infty$. Per la convessità calcoliamo la derivata seconda

$$f''(x)=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}\,(x^2-1)}<0.$$

Quindi f è concava sulle semirette $(-\infty,-1]$ e $[1,+\infty)$.

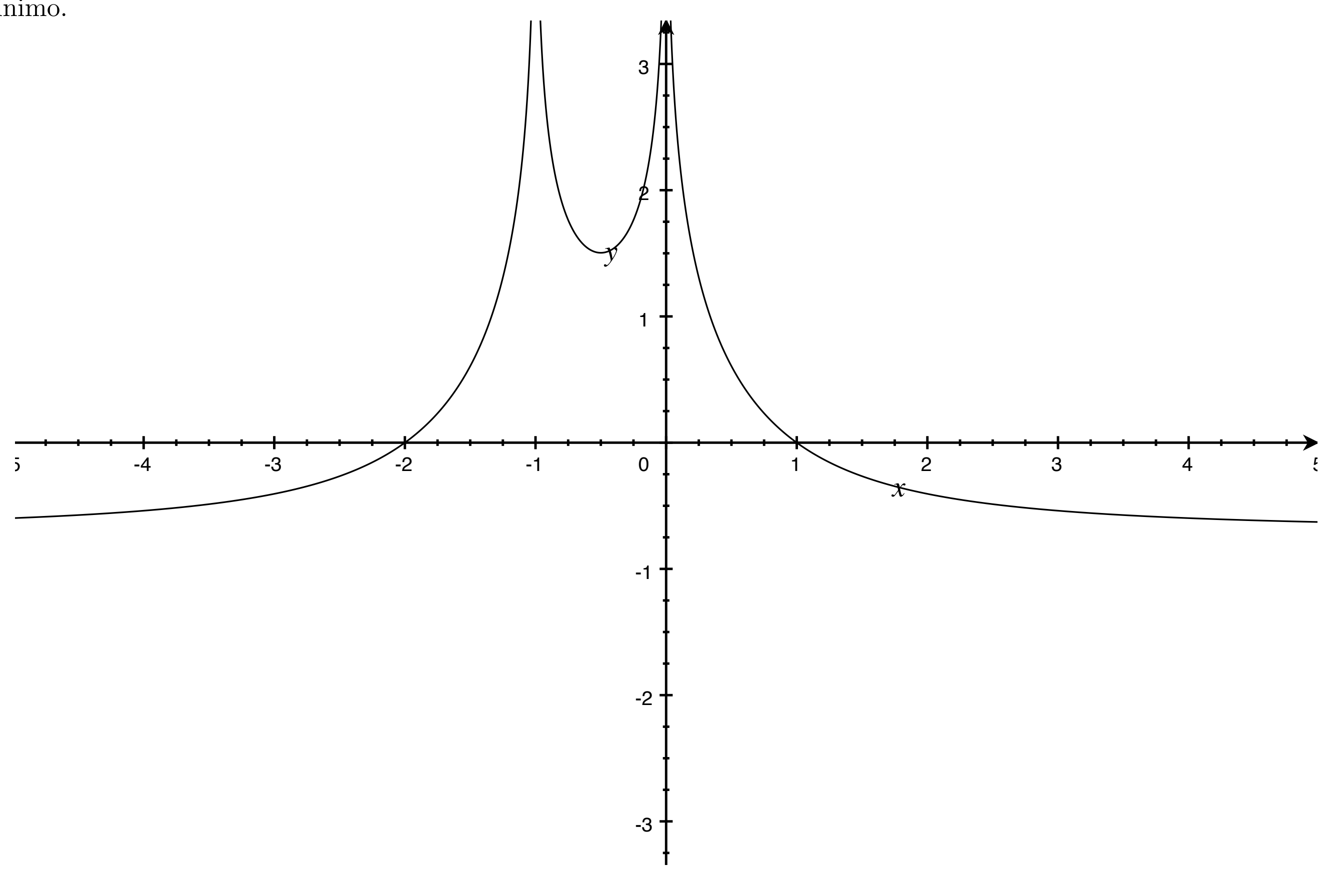


Esercizio 3 Studiare la funzione
$$f(x) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x^2+x|}\right)$$
determinandone insieme di definizione, asintoti (compresi quelli obliqui), estremi inferiore e superiore (o massimo e minimo), intervalli di monotonia e punti di massimo o di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita quando il denominatore $|x^2+x|$ è diverso da zero e quando l'argomento del logaritmo è strettamente positivo. Questa seconda condizione è sempre verificata perché l'argomento è somma di due quantità sempre strettamente positive. Dobbiamo quindi richiedere $x^2+x \neq 0$ cioè $x \neq 0$ e $x \neq -1$. L'insieme di definizione della funzione è quindi
$$(-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty).$$
Vediamo i limiti
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{+\infty}\right) = \log\left(\frac{1}{2}+0\right) = -\log 2$$
$$\lim_{x\to-1} f(x) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{0^+}\right) = \log(+\infty) = +\infty$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{0^+}\right) = \log(+\infty) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{+\infty}\right) = \log\left(\frac{1}{2}+0\right) = -\log 2.$$
La funzione presenta quindi un asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$ di equazione $y=-\log 2$ e due asintoti verticali di equazione $x=-1$ e $x=0$. Non ci sono asintoti obliqui. Dividiamo ora il dominio in due parti per eliminare il valore assoluto. Osserviamo che
$$x^2+x>0 \iff x \in (-\infty,-1)\cup(0,+\infty), \qquad x^2+x<0 \iff x\in(-1,0).$$
Risulta quindi che
$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x^2+x}\right) & \text{se } x \in (-\infty,-1)\cup(0,+\infty) \\ \log\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2+x}\right) & \text{se } x\in(-1,0). \end{cases}$$
Consideriamo prima il caso $x \in (-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$. Avremo allora
$$f'(x) = \frac{-\dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x^2+x}} = \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x)^2+2(x^2+x)}.$$
Osserviamo che in questa parte dell'insieme di definizione risulta $x^2+x>0$ quindi il denominatore è positivo. Il segno della derivata dipenderà quindi da quello del numeratore. Avremo quindi, intersecando con l'insieme di definizione:
$$f'(x)>0 \;\forall\, x\in(-\infty,-1), \qquad f'(x)<0 \;\forall\, x\in(0,+\infty).$$
Per il caso $x\in(-1,0)$ avremo invece
$$f'(x) = \frac{\dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x^2+x}} = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2-2(x^2+x)} = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)(x^2+x-2)}.$$
Studiando il segno di numeratore e denominatore otteniamo che
$$2x+1>0 \iff x>-\frac{1}{2}, \quad x^2+2x-2>0 \iff x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty), \quad x^2+x>0 \iff x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty).$$
Avremo quindi
$$f'(x)>0 \;\forall\, x\in\left(-\frac{1}{2},0\right), \qquad f'(x)<0 \;\forall\, x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right).$$

Riassumendo i risultati trovati otteniamo che f è strettamente crescente in $(-\infty,-1)$, strettamente decrescente in $\left(-1,-\frac{1}{2}\right]$, strettamente crescente in $\left[-\frac{1}{2},0\right)$ e strettamente decrescente in $(0,+\infty)$. Il punto di ascissa $x=-\frac{1}{2}$ è di minimo locale. L'estremo inferiore di f vale $-\log 2$, l'estremo superiore vale $+\infty$. La funzione non ha né massimo né minimo.



Esercizio 4 Studiare la funzione $f(x)=e^{2x}\sqrt[3]{x}$ determinandone insiemi di derivabilità, asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore (o eventualmente massimo e minimo), punti di massimo e minimo locali, intervalli di convessità e punti di flesso.

Soluzione

La funzione è definita e continua su tutta le retta reale ma potrebbe non essere derivabile in $x=0$ a causa della radice cubica. Calcoliamone la derivata.

$$f'(x)=2e^{2x}x^{\frac{1}{3}}+e^{2x}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=e^{2x}x^{-\frac{2}{3}}\left(2x+\frac{1}{3}\right).$$

Risulta che f' non è definita per $x=0$ e si ha

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x)=+\infty$$

quindi, dato che la funzione è continua in $x=0$, risulta in tale punto non derivabile e strettamente crescente con tangente verticale. Vediamo ora i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{e^{-2x}}=(\text{Hôpital})=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{-2e^{-2x}}=\frac{0}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=e^{\infty}\infty=\infty.$$

La funzione ha quindi un asintoto orizzontale di equazione $y=0$ per $x\to-\infty$. Potrebbe avere un asintoto obliquo per $x\to\infty$, verifichiamolo.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^{\frac{2}{3}}}=(\text{Hôpital})\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}=\frac{+\infty}{0^{+}}=+\infty$$

quindi non ci sono asintoti obliqui. Non ci sono ovviamente asintoti verticali perché la funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$. Dai limiti otteniamo anche che la funzione non ha massimo e $\sup(f)=+\infty$.

Vediamo ora la monotonia studiando il segno della derivata.

$$f'(x) > 0 \iff 2x + \frac{1}{3} > 0 \iff x > -\frac{1}{6}$$

dato che e^{2x} e $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ sono sempre positive. La funzione è quindi strettamente decrescente sulla semiretta $(-\infty, -\frac{1}{6}]$ e strettamente crescente sulla semiretta $[-\frac{1}{6}, +\infty)$. Osserviamo a questo proposito che, pur essendo la funzione non derivabile in $x = 0$, in tale punto è continua ed è strettamente crescente sia sull'intervallo $[-\frac{1}{6}, 0]$ che sulla semiretta $[0, +\infty)$. ll punto di ascissa $x = -\frac{1}{6}$ è di minimo assoluto e

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = e^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{6e}}.$$

Quindi $\min(f) = \frac{-1}{\sqrt[3]{6e}}$.

Vediamo infine la convessità calcolando la derivata seconda (la funzione non ha derivata seconda in $x = 0$ dato che non ha neanche derivata prima)

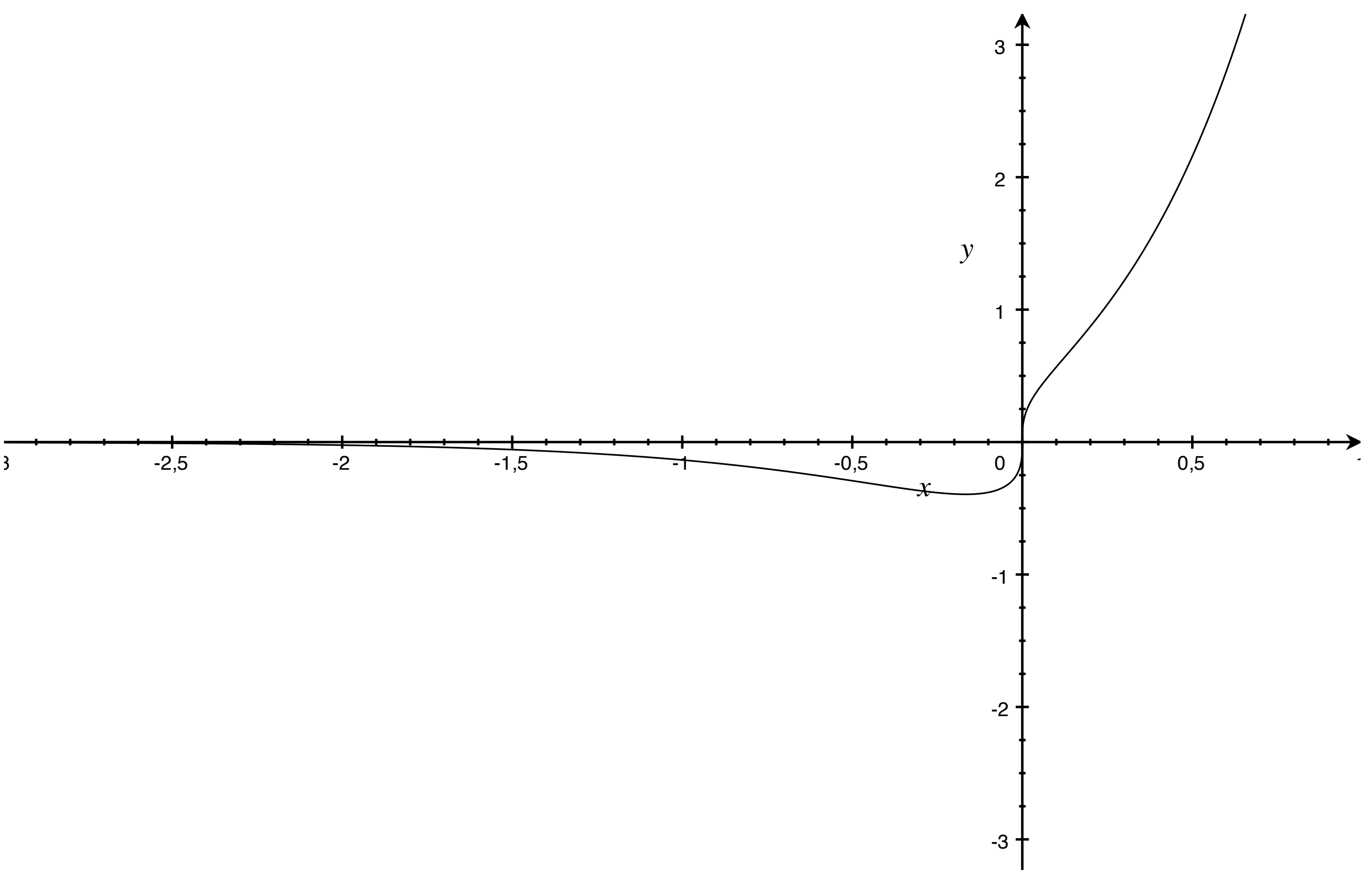
$$f''(x) = 2e^{2x}\left(2x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) + e^{2x}\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\right) = e^{2x}x^{-\frac{5}{3}}\left(4x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{9}\right).$$

Risulta che

$$e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^{-\frac{5}{3}} > 0 \iff x > 0$$

$$4x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{9} > 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{6}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{6}, \infty\right).$$

Mettendo insieme i risultati otteniamo che la funzione è concava sulla semiretta $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{6}]$, convessa nell'intervallo $[\frac{-1-\sqrt{3}}{6}, 0]$, concava nell'intervallo $[0, \frac{-1+\sqrt{3}}{6}]$ e di nuovo convessa sulla semiretta $[\frac{-1+\sqrt{3}}{6}, \infty)$. I punti di ascissa $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{6}$, $x = 0$, $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{6}$ sono punti di flesso.



Esercizio 5 Studiare la funzione

$$f(x) = x\left((\log x)^3 - 3(\log x)^2 + 2(\log x) - 2\right)$$

determinandone insieme di definizione, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui) estremi superiore ed inferiore (o massimo e minimo), punti di massimo o di minimo locali e punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita per $x > 0$ a causa della presenza del logaritmo. La funzione è derivabile (quindi anche continua) in tutto il suo insieme di definizione. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\log^3 x\left(1 - \frac{3}{\log x} + \frac{2}{\log^2 x} - \frac{2}{\log^3 x}\right) = 0\cdot 1 = 0$$

avendo sfruttato il limite notevole

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha |\log x|^\beta = 0, \qquad \forall \alpha,\beta > 0.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x\log^3 x\left(1 - \frac{3}{\log x} + \frac{2}{\log^2 x} - \frac{2}{\log^3 x}\right) = +\infty\cdot 1 = +\infty.$$

La funzione quindi non è limitata superiormente ma è limitata inferiormente. Non ci sono asintoti né verticali né orizzontali. Verifichiamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \log^3 x\left(1 - \frac{3}{\log x} + \frac{2}{\log^2 x} - \frac{2}{\log^3 x}\right) = +\infty$$

quindi non c'è asintoto obliquo. Troviamo ora gli intervalli di monotonia studiando il segno della derivata.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log^3 x - 3\log^2 x + 2\log x - 2 + x\left(\frac{3\log^2 x}{x} - \frac{6\log x}{x} + \frac{2}{x}\right) \\ &= \log^3 x - 3\log^2 x + 2\log x - 2 + 3\log^2 x - 6\log x + 2 = \log^3 x - 4\log x = \log x(\log^2 x - 4) \\ &= \log x(\log x + 2)(\log x - 2). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$f'(x) > 0 \iff \log x \in (-2,0)\cup(2,+\infty) \iff x \in (e^{-2},1)\cup(e^2,+\infty).$$

La funzione f sarà quindi strettamente decrescente in $(0,e^{-2}]$, strettamente crescente in $[e^{-2},1]$, strettamente decrescente in $[1,e^2]$ e strettamente crescente in $[e^2,+\infty)$. Il punto di ascissa $x = e^{-2}$ è di minimo locale, $x = 1$ è di massimo locale e $x = e^2$ è di minimo locale. Per determinare il minimo della funzione confrontiamo il valore che assume nei punti $x = e^{-2}$ e $x = e^2$.

$$f\left(e^{-2}\right) = e^{-2}\left((-2)^3 - 3(-2)^2 + 2(-2) - 2\right) = \frac{-8-12-4-2}{e^2} = -\frac{26}{e^2}$$

$$f(e^2) = e^2\left(2^3 - 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 2\right) = e^2(8-12+4-2) = -2e^2.$$

Osservando che

$$-2e^2 < -\frac{26}{e^2} \iff e^4 > 13$$

otteniamo che il minimo di f vale $-2e^2$.

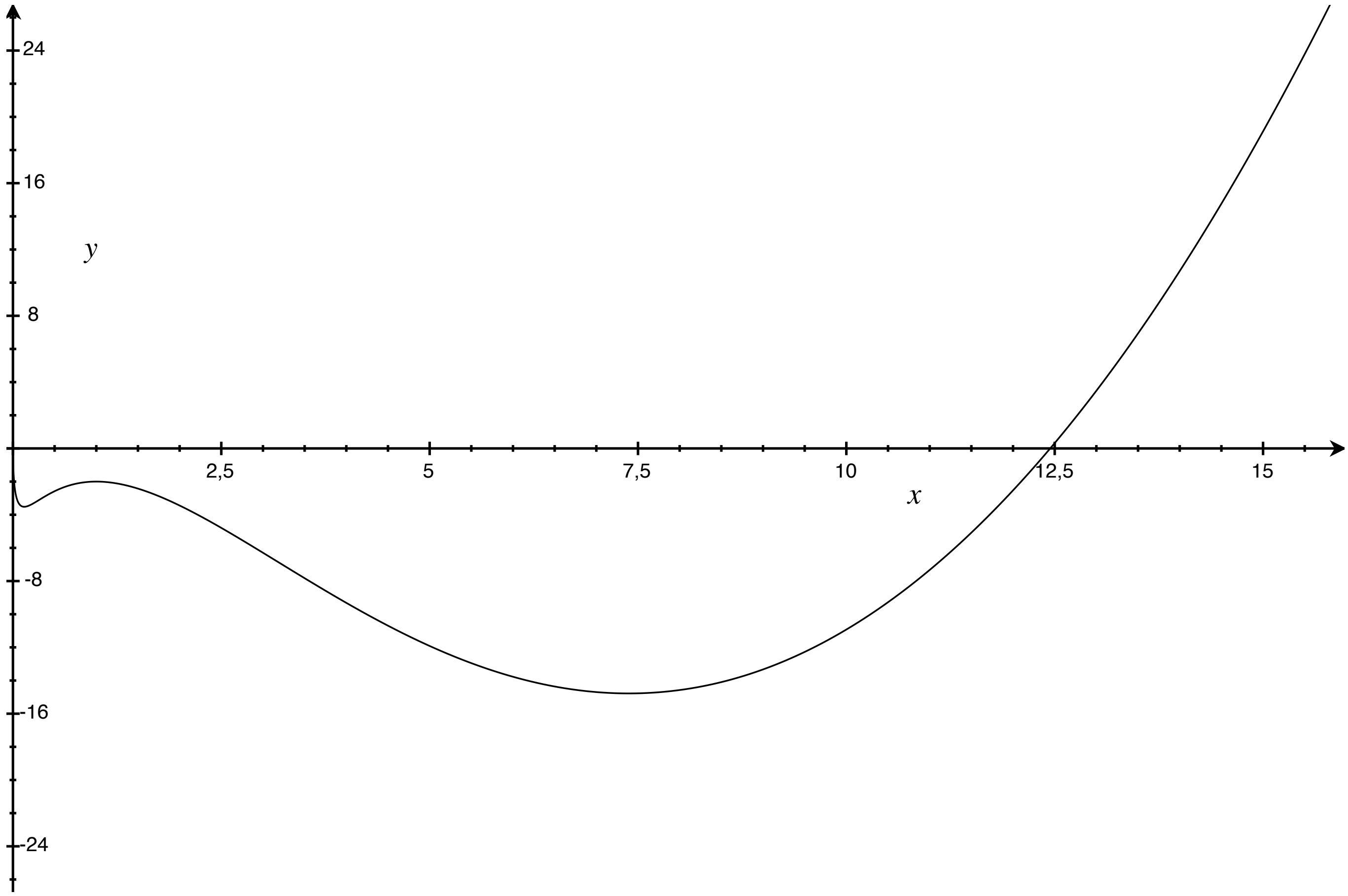
Vediamo ora la convessità calcolando la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{3\log^2 x}{x} - \frac{4}{x} = \frac{3\log^2 x - 4}{x}.$$

Avremo allora che

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \iff 3\log^2 x - 4 > 0 \iff \log^2 x > \frac{4}{3} &\iff \log x \in \left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty\right) \\ &\iff x \in \left(0, e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)\cup\left(e^{\frac{2}{\sqrt{3}}},+\infty\right). \end{aligned}$$

La funzione è quindi convessa in $\left(0, e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right]$, concava in $\left[e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}, e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right]$ e convessa in $\left[e^{\frac{2}{\sqrt{3}}},+\infty\right)$. I punti di ascissa $x = e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}$ e $x = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ sono di flesso.



Esercizio 6 Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

determinandone insiemi di definizione, di continuità e derivabilità, evidenziando eventuali punti angolosi o di cuspide, asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo), intervalli di monotonia e punti di massimo o di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione arcsin è definita quando l'argomento è compreso tra -1 e 1, quindi deve essere

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff -(1+x^2) \leq 2x \leq 1+x^2$$

osserviamo che $2x \leq 1+x^2 \iff 0 \leq x^2-2x+1 = (x-1)^2$ che è sempre verificata.

Analogamente $-(1+x^2) \leq 2x \iff 0 \leq x^2+2x+1 = (x+1)^2$ sempre verificata. Quindi f è definita $\forall x \in \mathbb{R}$.

Osserviamo anche che f è dispari, infatti

$$f(-x) = \arcsin\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right) = -\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = -f(x)$$

quindi i risultati ottenuti per $x \geq 0$ si simmetrizzano su $x \leq 0$.
(questo vale anche per l'insieme di definizione).
La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$ perché composizione di funzioni continue.
Per la derivabilità, ricordiamo che $g(t) = \arcsin t$ è derivabile se $t \in (-1,1)$ ma $g'(1) = g'(-1) = +\infty$, quindi dovremo controllare i punti dove l'argomento dell'arcoseno vale 1 e -1.

$$\frac{2x}{1+x^2} = 1 \iff 2x = 1+x^2 \iff 0 \neq x^2-2x+1 = (x-1)^2$$

$$\iff x = 1.$$

Vediamo quindi la derivabilità in $x=1$.

Dato che dovremo calcolare la derivata e la funzione è continua in $x=1$, proveremo a fare il limite della derivata.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}\,(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}\,(1+x^2)} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{x^4+2x^2+1-4x^2}\,(1+x^2)} =$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(x^2-1)^2}\,(1+x^2)} = \frac{2(1-x^2)}{|x^2-1|\,(1+x^2)}$$

quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2-1)(1+x^2)} = \dfrac{-2}{1+x^2} & \text{se } x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \\[2ex] \dfrac{2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \dfrac{2}{1+x^2} & \text{se } x \in (-1,1) \end{cases}$$

Verifichiamo ora la derivabilità in $x=-1$ e $x=1$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{-2}{1+x^2} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2}{1+x^2} = 1$$

Quindi

$$f'_+(1) = -1 \quad , \quad f'_-(1) = 1$$

Il punto $x=1$ è un punto angoloso e f non è derivabile in $x=1$.

Per simmetria otteniamo che f non è derivabile in $x=-1$ e che $f'_-(-1)=-1$, $f'_+(-1)=1$, quindi anche $x=-1$ è un punto angoloso.

Vediamo se ci sono asintoti orizzontali.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arcsin 0 = 0.$$

per simmetria, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Abbiamo quindi un asintoto orizzontale di equazione $y=0$.

Vediamo ora la monotonia.

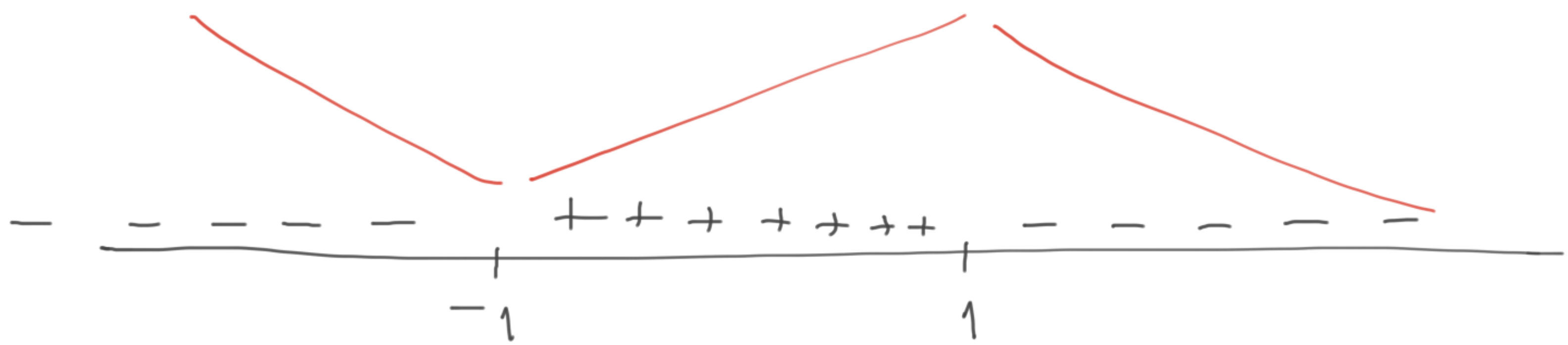
Studiamo il segno della derivata.

Se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{-2}{1+x^2} < 0$$

Se $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} > 0$$



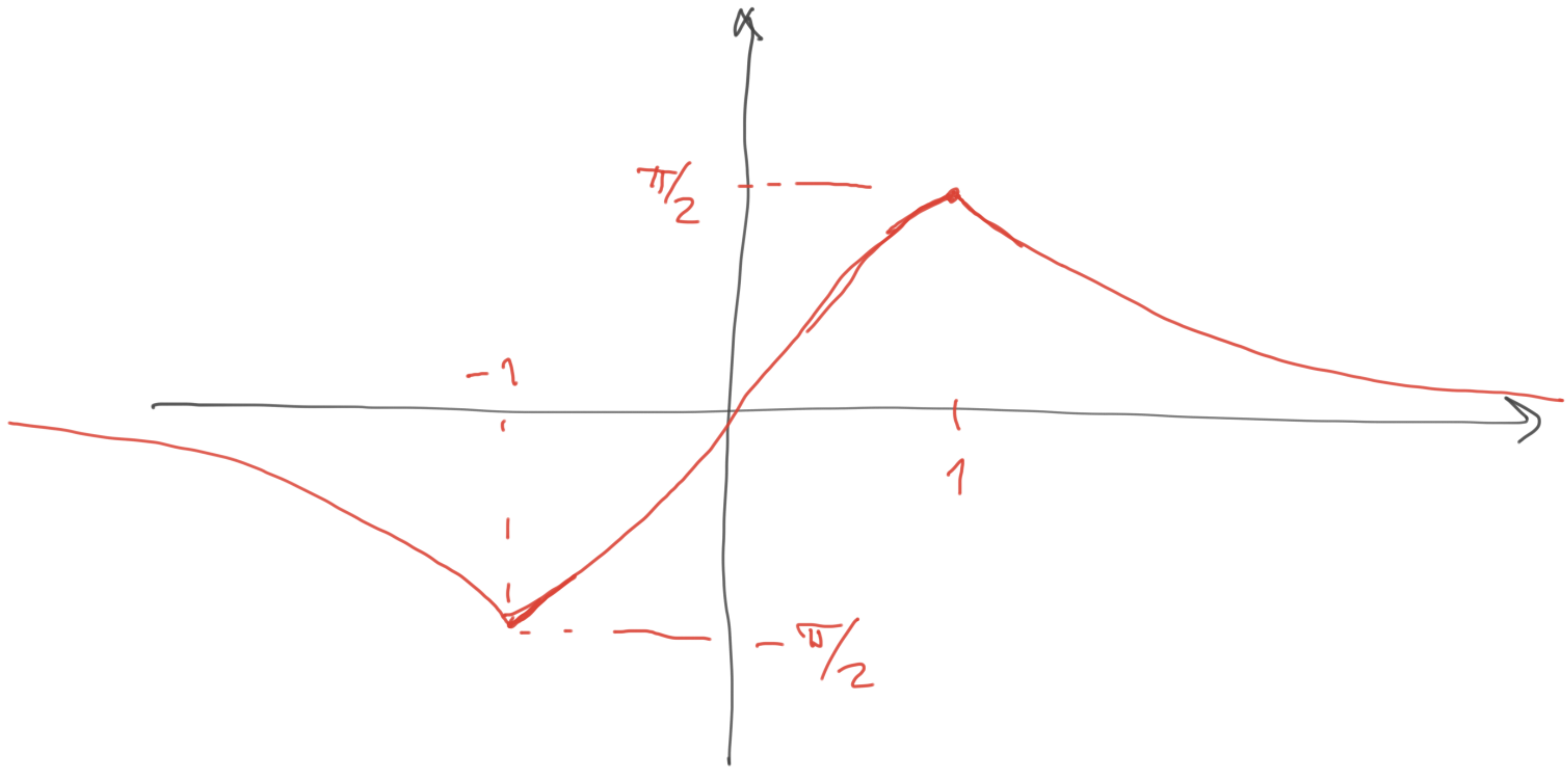
La funzione è quindi strettamente decrescente in $(-\infty, -1]$, strettamente crescente in $[-1, 1]$ e strettamente decr. in $[1, +\infty)$.

Ne segue che $x=-1$ è punto di minimo locale e $x=1$ è punto di massimo locale.

Dal fatto che $f(x) \geq 0 \iff x \geq 0$, $f(x) \leq 0 \iff x \leq 0$ otteniamo che $x=1$ è punto di massimo assoluto e $x=-1$ è punto di minimo assoluto.

$$f(1) = \arcsin\left(\frac{2}{2}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = \max(f)$$

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2} = \min(f).$$



α
$\pi/2$
-1
1
$-\pi/2$

Vediamo la convessità

Se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-2}{1+x^2}$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

Quindi $f''(x) > 0$ se $x \in (1, +\infty)$

$f''(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -1)$

Se $x \in (-1, 1) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

quindi $\quad f''(x) > 0 \quad$ se $\quad x \in (-1,0)$

$\qquad\qquad f''(x) < 0 \quad$ se $\quad x \in (0,1)$.

Ne segue che f è strettamente concava in $(-\infty,-1]$, strettamente convessa in $[-1,0]$, strettamente concava in $[0,1]$ e strettamente convessa in $[1,+\infty)$.

Il punto $x=0$ è punto di flesso. I punti $x=-1$ e $x=1$ sono punti dove cambia la convessità ma non sono di flesso perché la funzione non ha derivata.