ANCORA INTEGRALI IMPROPRI

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$

Abbiamo definito $\int_a^b f(x)dx$ quando $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a,M]$ con $a<M<b$.

Analogamente si definisce $\int_a^b f(x)\,dx$ quando

$f: (a, b] \to \mathbb{R}$ con $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, e f integrabile su $[M, b]$ $\forall\, a < M < b$,

come $\lim_{M \to a^+} \int_M^b f(x)dx$ (se esiste).

E se $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ "ha un problema" in entrambi a e b?

ad esempio: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$, oppure $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2}\,dx$.

<u>Def</u>: sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, che sia integrabile su $[M_1, M_2]$ con $a < M_1 < M_2 < b$.

Scegliamo arbitrariamente $c \in (a,b)$.

<u>Se</u> esistono entrambi gli integrali impropri $\underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{= L_1}$ e $\underbrace{\int_c^b f(x)dx}_{= L_2}$

allora si definisce

$$\int_a^b f(x)\,dx = L_1 + L_2$$ se la somma non è indeterminata

(cioè non è $+\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$)

e si dice che

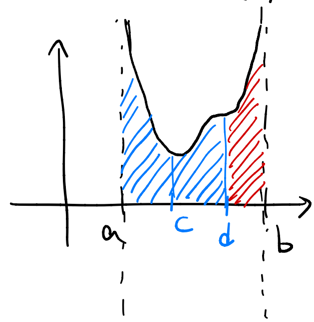
f è integrabile (in senso improprio) su (a,b).

<u>Oss</u>: l'esistenza e il valore di $\int_a^b f(x)\,dx$

non dipendono dalla scelta di $c \in (a,b)$.

Infatti, se scelgo $d \in (a,b)$,

ho che



$$\int_a^d f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$$

$$\int_d^b f(x)\,dx = \int_d^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Sommando queste due equazioni ottengo

$$\int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x) + \underbrace{\int_c^d f(x)\,dx + \int_d^c f(x)\,dx}_{=0}$$

Esempio: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Scelgo $c=0$.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{M\to-\infty} \int_{M}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{M\to-\infty} \left[\operatorname{arctg}(x)\right]_M^0$$

$$= \lim_{M\to-\infty} \left[0-\operatorname{arctg}(M)\right]$$

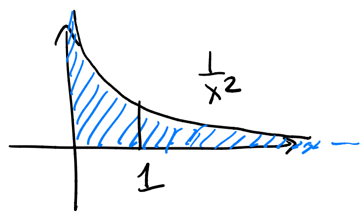
$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = (\text{stessi conti}) = \lim_{M\to+\infty} \left[\operatorname{arctg}(x)\right]_0^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \operatorname{arctg}(M) = \frac{\pi}{2}$$

Quindi $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ (converge).

Esempio: $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$



Scegliamo $c=1$.

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to0^+} \int_{M}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to0^+} \left[-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_M^1 =$$

$$= \lim_{M\to0^+} \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot M^3}\right] = +\infty$$

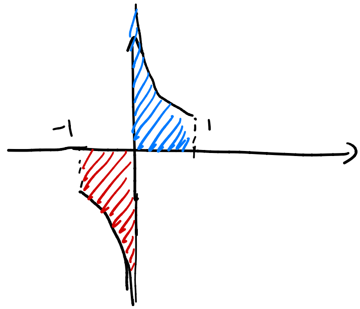
diverge.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_{1}^{M} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_1^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{3M^3} + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{3}$$

Quindi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = +\infty + \frac{1}{3} = +\infty$ (diverge a $+\infty$).

Esempio: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$.



in questo caso spezziamo in $c=0$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x} dx$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx = \lim_{M\to 0^-} \int_{-1}^{M} \frac{1}{x} dx = \lim_{M\to 0^-} \left[\log(-x) \right]_{-1}^{M} = \lim_{M\to 0^-} \log(-M) = -\infty$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{M\to 0^+} \int_{M}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{M\to 0^+} \left[\log(x) \right]_{M}^{1} = \lim_{M\to 0^+} -\log(M) = +\infty$$

Quindi $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = +\infty - \infty$, e dunque non esiste.

Attenzione: a non fare $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \left[\log|x| \right]_{-1}^{1} =$

$$= \log(1) - \log(1) = 0$$

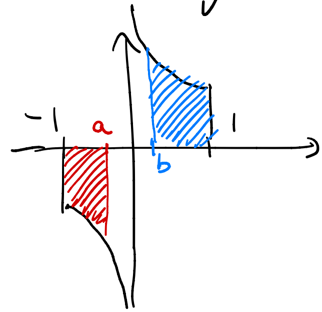
SBAGLIATO, il teo di Torricelli

non si applica perché f non è integrabile su $[-1,1]$.

Bisogna trattarlo come integrale improprio.

Oss: Potreste pensare che ha senso dire $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = 0$, visto che $\frac{1}{x}$ è dispari, e le aree e si sovrappongono perfettamente.

Si preferisce dire comunque che l'integrale non esiste:



Potremmo sommare

$$\int_{-1}^{a} \frac{1}{x}\,dx + \int_{b}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

e far tendere $a \to 0^-$, $b \to 0^+$

Il problema è che il risultato del limite dipende da come viene fatto questo limite...

Esempio:
$$\lim_{b\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x}\,dx + \int_{b}^{1} \frac{1}{x}\,dx\right) =$$

$$= \lim_{b\to 0^+}\left(\log(b) - \log(b)\right) = 0$$

Ma per esempio

$$\lim_{b\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-2b}\frac{1}{x}\,dx+\int_{b}^{1}\frac{1}{x}\,dx\right)$$

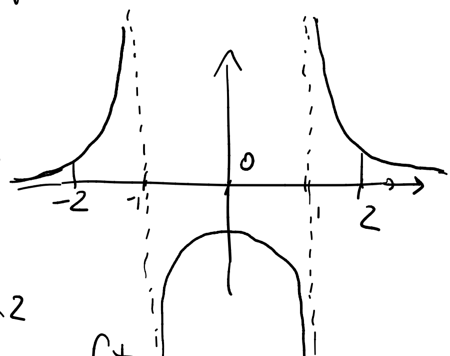
$$=\lim_{b\to 0^+}\left(\log(2b)\;-\log(b)\right)=$$

$$=\lim_{b\to 0^+}\log\left(\frac{2b}{b}\right)=\log(2)$$

e il risultato e' diverso.

Se ci sono "più problemi" sull'intervallo di integrazione, si spezza in tanti intervalli quanto basta per ricondursi a integrali impropri in cui c'e' solo un problema.

<ins>Esempio</ins>: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4-1}\,dx$ Grafico



$$\int_{-\infty}^{+\infty}=\int_{-\infty}^{-2}+\int_{-2}^{-1}+\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}+\int_{1}^{2}+\int_{2}^{+\infty}$$

e la somma ha senso se $\underbrace{\text{hanno senso}}_{\text{cioe' i limiti esistono}}$, e non e' indeterminata.

Oss: in questi casi si scrive comunque

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx \quad \text{e non} \quad \int_{[-1,0)\cup(0,1]} \frac{1}{x}\,dx .$$

Prop: $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ integrabile su $[a, M]$ $\forall\, a<M<b$

e supponiamo che f abbia segno costante.

Allora esiste (finito o infinito) $\int_a^b f(x)\,dx$.

(e enunciato analogo per $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ ----)

Dim: supponiamo ad es. che $f \geq 0$ su $[a,b)$

Mostriamo che $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ e' debolmente crescente.

Seguirà che $\exists \lim_{x\to b^-} F(x)$ che e' proprio $\int_a^b f(t)\,dt$.

Infatti se $x_1 < x_2$, allora

$$F(x_2) = \int_a^{x_2} f(t)\,dt = \int_a^{x_1} f(t)\,dt + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt}_{\geq 0} \geq$$

$$\geq \int_a^{x_1} f(t)\,dt = F(x_1)$$

$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \geq 0$ perché $f(t) \geq 0$ e $x_2 > x_1$

$\blacksquare$

Integrali impropri notevoli

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Se $\alpha = 1$, $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| \rightsquigarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx =$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left[\log(x)\right]_1^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left(\log(M)\right) = +\infty$$

diverge.

- Se $\alpha \neq 1$

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha} + c$$

Quindi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_1^M =$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\alpha}\cdot M^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right).$$

- Se $1-\alpha > 0$, cioè $\boxed{\alpha < 1}$, il limite è $\boxed{+\infty.}$
- Se $1-\alpha < 0$, cioè $\boxed{\alpha > 1}$, il limite $\boxed{\text{è finito}}$ e vale $-\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} > 0.$

Riassumendo $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ $\begin{cases} \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \\ \text{converge se } \alpha > 1. \end{cases}$

<u>Esempio</u>: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ diverge a $+\infty$.

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\alpha = 1$, $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{M \to 0^+} [\log(x)]_M^1 = \lim_{M \to 0^+} (\log(1) - \log(M)) = +\infty$
  diverge

- $\alpha \neq 1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M \to 0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_M^1 =$

$$= \lim_{M \to 0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \cdot M^{1-\alpha} \right]$$

  - se $1-\alpha > 0$, cioè $\boxed{\alpha < 1}$, il limite $\boxed{\text{è finito}}$
    e vale $\frac{1}{1-\alpha} > 0$
  - se $1-\alpha < 0$, cioè $\boxed{\alpha > 1}$, il limite è $\boxed{+\infty}$

Riassumendo, $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx =$ $\begin{cases} \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \\ \text{converge se } \alpha < 1. \end{cases}$

<u>Oss</u>: quindi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

CRITERI PER STUDIARE LA CONVERGENZA DI INTEGRALI IMPROPRI.

Criterio del confronto:

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabili in ogni $[a, M]$ $\forall\, a < M < b$.

Se $\exists\, U$ intorno sx di b t.c. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in U \cap [a, b)$

1) se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, allora anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

2) se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge (a $+\infty$), allora anche $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge (a $+\infty$).

(enunciato analogo se $f, g : (a, b]$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, ...)

Esempio: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 3x^3 + x + 1}$.

$f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 3x^3 + x + 1}$ è continua in $[1, +\infty)$ perché $x^4 + 3x^3 + x + 1 > 0$ $\forall x \geq 1$.

Inoltre $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x^4}$ $\forall x \in [1, +\infty)$

Visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}dx$ converge, per confronto concludiamo che $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Criterio del confronto asintotico (C. A.)

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

integrabili su $[a, M]$ $\forall a < M < b$.

Se $\exists U$ intorno sx di b t.c.

$f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ $\forall x \in U \cap [a,b)$ e $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Allora:
- se $l \neq 0, +\infty$, $\int_a^b f(x)dx$ converge $\iff$ $\int_a^b g(x)dx$ converge.
- se $l = 0$ e $\int_a^b g(x)dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ converge
- se $l = +\infty$ e $\int_a^b f(x)dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)dx$ converge

(ad esempio: $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow$ per x vicino a b vale $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$

$\Rightarrow f(x) \leq g(x)$ vicino a b.)

(enunciato analogo per $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ ...)
$a \in \overline{\mathbb{R}}$.

<u>Oss</u>: le implicazioni di questi criteri <u>non si invertono</u>.

<u>Esempio</u>: $\frac{1}{x^2} \le \frac{1}{x}$ per $x \ge 1$, e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge.
$f(x) \le g(x)$

<u>Non si può concludere</u> che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ diverge
(è falso!)

Il crit. del confronto dice
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ diverge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} g(x)\,dx \text{ diverge.}$$

non viceversa!

<u>Esempio</u>: $\int_0^1 \frac{1}{x - \sin x} dx$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x - \sin x}$ è continua in $(0, 1]$, e $f(x) > 0$ in $(0, 1]$.

(infatti $x - \sin x \ge 0 \quad \forall x \ge 0$
ed è $= 0 \Leftrightarrow x = 0$)

<u>Metodo</u>: usare Taylor per confrontare la $f(x)$ con una certa $\frac{1}{x^\alpha}$

Sviluppiamo il denominatore in 0 (il punto "problematico")

$$x-\sin x = x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

$$f(x)=\frac{1}{x-\sin x}\sim\frac{1}{\frac{x^3}{6}} \quad \text{attorno a } 0.$$

Uso C.A. con $g(x)=\frac{1}{x^3}$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{x-\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6$$

Per C.A. concludo che $\int_0^1 f(x)\,dx$ si comporta come $\int_0^1\frac{1}{x^3}\,dx$, che sappiamo divergere.

Quindi $\int_0^1\frac{1}{x-\sin x}\,dx$ diverge.

Oss: i criteri del confronto e C.A. si possono usare anche per funzioni negative, cambiando opportunamente le conclusioni.

Ad esempio: se $g(x)\le f(x)\le 0$ per $x\in[a,b)$

Allora: • se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, allora anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

- se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge ($a -\infty$ per forza)

allora $\int_a^b g(x)$ diverge ($a -\infty$).