Esercitazione 3/12

Esercizio 1 : $\int_{-1}^{1} \frac{\sin(\sqrt{|x|})}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx$

$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{|x|})}{\sqrt{1-\cos x}}$. f e' continua e limitata in $[-1,1]$?

$\boxed{\text{NO}}$ $f(x)$ e' definita soltanto per gli x t.c.

(non e' definita dappertutto)

$1-\cos x > 0$ cioe' $\cos x < 1$ cioe' (in $[-1,1]$)
$x \neq 0$.

Quindi $f(x)$ non e' definita in $x=0$.

Per caso $f(x)$ ha limite finito per $x \to 0$?

Se sì, sono a posto (la funzione e' limitata, e l'integrale non e' improprio)

↳ (ad esempio $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ ....)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sqrt{|x|})}{\sqrt{1-\cos x}} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{0}{0}$$

Taylor: $\sin(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$

$$1-\cos x = 1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}{\sqrt{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}} = \frac{\sqrt{x}\,(1+o(1))}{x\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+o(1)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1+o(1)}{\sqrt{\frac{1}{2}+o(1)}} \longrightarrow +\infty \cdot (\sqrt{2}) = +\infty$$

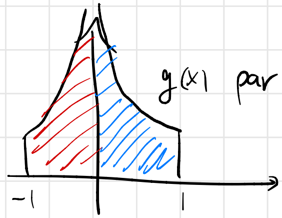
Quindi f non è limitata attorno a $0 \in [-1,1]$, e l'integrale è improprio.

Per capire il comportamento, spezziamolo così

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$. Studiamoli separatam.

Cosa utile: $f(x)$ è pari: $f(-x) = \frac{\sin\sqrt{|-x|}}{\sqrt{1-\cos(-x)}} = \frac{\sin\sqrt{|x|}}{\sqrt{1-\cos x}} = f(x)$

Quindi, $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$



e basta considerare $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

L'unico problema è in 0. Come si comporta $f(x)$ per $x \to 0^+$? Ho visto sopra che

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{2}).$$

Usiamo il confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

(notiamo che $\underbrace{f(x) \geq 0}_{\text{in } [0,1]}$ e $g(x) \geq 0$ in un intorno di 0)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(\frac{1+o(1)}{\sqrt{\frac{1}{2}+o(1)}}\right)}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{x}}}} = \sqrt{2} \text{ finito e } \neq 0.$$

← calcolato sopra

Per C.A., $\int_0^1 f(x)dx$ ha lo stesso comportamento di

$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, che sappiamo convergere, visto che $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Quindi concludo che $\int_{-1}^1 f(x)dx$ converge. (d)

Esercizio 3 : $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\overbrace{(e^{x^2}+1)}^{\geq 1}\overbrace{(1-\cos(\sqrt{x}))}^{\geq 0} \cdot \overbrace{(1+\sin x)}^{\geq 0}}{\underbrace{(e^{x^2}-1)}_{\geq 0}\underbrace{(2+\sin x)}_{\geq 1}\underbrace{(1+x^2)}_{\geq 1}}$$

$\int_0^{+\infty} f(x)dx = ?$ $\qquad \int_1^{+\infty} f(x)dx = ?$

- Dominio e limitatezza di $f(x)$
- segno di $f(x)$ (per usare i criteri ...)

Dominio: serve che . $x > 0$ e $e^{x^2} - 1 \neq 0$

$e^{x^2} \neq 1$

$x^2 \neq 0$

$x \neq 0$.

Quindi l'unico problema e' in 0.

Come prima, guardiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$$f(x) = \underbrace{\frac{(e^{x^2}+1)(1+\sin x)}{(2+\sin x)(1+x^2)}}_{\downarrow} \cdot \frac{1-\cos(\sqrt{x})}{e^{x^2}-1}$$

$$\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1} = 1$$

quando $x \to 0$.

Taylor: $\cos(\sqrt{x}) = 1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{2} + o((\sqrt{x})^2)$

$$\Rightarrow 1-\cos(\sqrt{x}) = \frac{x}{2} + o(x)$$

$$e^{x^2}-1 = 1+x^2+o(x^2)-1$$
$$= x^2+o(x^2)$$

quindi
$$\frac{1-\cos(\sqrt{x})}{e^{x^2}-1} = \frac{\frac{x}{2}+o(x)}{x^2+o(x^2)} = \frac{x\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{x^2(1+o(1))} =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } x\to 0^+.$$

Quindi f è illimitata in un intorno destro di 0, e l'integrale è improprio.

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Notiamo che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$, quindi

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non può non esistere, cioè o è convergente o diverge a $+\infty$.

Analizziamo $\int_0^1 f(x)\,dx$. Come si comporta $f(x)$ per $x\to 0^+$?

Sopra abbiamo visto che $f(x) \sim \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$

Quindi facciamo C.A. con $g(x) = \frac{1}{x}$.

(notare che $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ per $x \in (0, +\infty)$)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} \right)}{\cancel{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2} \text{ finito e } \neq 0$$

Quindi $\int_0^1 f(x)\,dx$ si comporta come $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$, che

sappiamo divergere. Quindi anche $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

diverge a $(+\infty)$

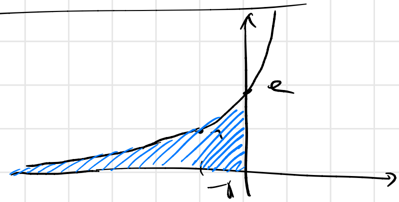
[visto che $f(x) \geq 0$ su $(0, +\infty)$, $\int_1 f(x)\,dx$ che

non abbiamo analizzato, converge o diverge

esso stesso a $+\infty$, ma in ogni caso $\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

è $+\infty$]   (c)

Esercizio 4: $\int_{-\infty}^0 e^{x+1}\,dx = ?$



$f(x) = e^{x+1}$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$.

Quindi l'unico problema è l'estremo $-\infty$.

$$\int_{-\infty}^0 e^{x+1}\,dx = \lim_{M \to -\infty} \int_M^0 e^{x+1}\,dx = \lim_{M \to -\infty} \left[e^{x+1} \right]_M^0$$

$$\left(\int e^{x+1}\,dx = e^{x+1}+c\right) \qquad = \lim_{M\to-\infty}\left[e^1 - e^{M+1}\right]$$

$$= e^1 - 0 = e \qquad (\mathbb{C})$$

Esercizio 5 : $\int_0^{+\infty} \left(e^{-1/x^2}-1\right)dx$

$$f(x) = e^{-1/x^2} - 1.$$

- dominio? serve $x \neq 0$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\overbrace{-1/x^2}^{\to -\infty}} - 1 = 0 - 1 = -1.$$

stavolta il limite è finito. ⟹ l'unico problema dell'integrale è a $+\infty$.

Come si comporta $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} - 1$ per $x \to +\infty$

- segno di f? Si ha $f(x) < 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$

$$-\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{x^2}} < e^0 = 1 \Rightarrow e^{-1/x^2} - 1 < 0$$

si può usare il C.A., prendendo una qualche $g(x) \leq 0$.

Se $x \to +\infty$, $t = \frac{1}{x^2} \to 0^+$, e $e^{-\frac{1}{x^2}} - 1 = e^{-t} - 1$ ($t\to0^+$)

$$= 1 + (-t) + o(-t) - 1$$

$$= -t + o(t)$$

per $t \to 0$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{x^2}}-1 = -\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ per } x\to+\infty.$$

quindi $$e^{-\frac{1}{x^2}}-1 \sim -\frac{1}{x^2} \text{ per } x\to+\infty.$$

Uso C.A. con $g(x) = -\frac{1}{x^2}$. $\left(g(x) < 0 \quad \forall x\in(0,+\infty)\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\cancel{\frac{1}{x^2}}(1+o(1))}{-\cancel{\frac{1}{x^2}}} = 1$$

finito e $\neq 0$

~~$\Rightarrow$ per C.A. $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ si comporta come $\int_0^{+\infty}-\frac{1}{x^2}dx = -\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx}$~~ ??

Sappiamo che $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge, ma $\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$ diverge!

Quindi l'asserzione di sopra non è proprio giusta...

Rimedio: $$\int_0^{+\infty}f(x)dx = \overbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}^{\text{numero}} + \int_1^{+\infty}f(x)\,dx$$

e studio $\int_1^{+\infty}f(x)dx$. Ora come sopra, uso C.A.

con $g(x) = -\frac{1}{x^2}$

(stavolta è corretto, perché $g(x)$ è

definita e continua su $[1,+\infty)$)

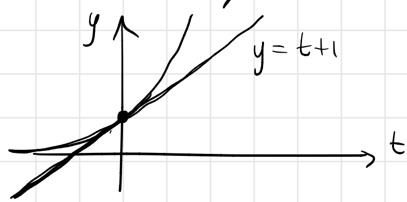
e concludo che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ si comporta

come $-\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$, che sappiamo convergere.

Quindi l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. (b)

(Si poteva anche il confronto (non asintotico), così:

$e^t \geq 1+t \quad \forall t \in \mathbb{R}$



si vede studiando la funzione

$g(t) = e^t - 1 - t$

Usiamo la disug. con $t = -\frac{1}{x^2}$. Troviamo $e^{-\frac{1}{x^2}} \geq 1 - \frac{1}{x^2}$

cioè $\underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}} - 1}_{f(x)} \geq -\frac{1}{x^2}$.

Ora $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ si può studiare per confronto, con

$g(x) = -\frac{1}{x^2}$. Abbiamo: $0 \geq f(x) \geq g(x)$

e $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge. Segue per confronto

che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.)

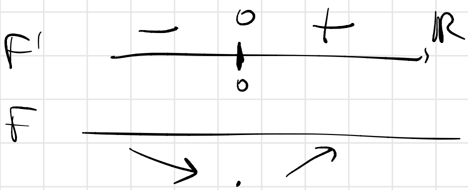
Esercizio 6. La funzione $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^x t^3\sqrt{1+t^6}\,dt$$

Ha massimo/minimo?

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{T.F.C.}}}{F'(x) =} x^3\sqrt{1+x^6}.$$

Segno di $F'(x)$ è lo stesso che il segno di x^3 (cioè è il segno di x)



in $x=0$, F ha un minimo relativo (che è anche assoluto)

Quindi F ha sicuramente minimo.

Ha massimo? Possiamo già dire di no, visto che $f(x)$ è strettam. crescente per $x>0$ e strettam. decresc. per $x<0$.

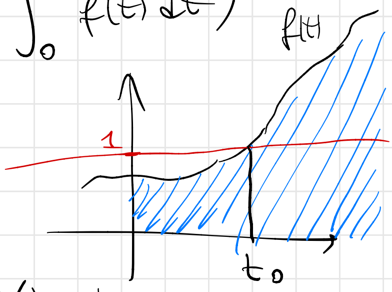
(c).

Vediamo direttamente che $F(x)$ non è limitata superiormente (quindi anche da questo segue che non ha massimo).

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^3\sqrt{1+t^6}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt$$

dove $f(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$.

Segue che questo limite (che è $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$) è $+\infty$.



Infatti: visto che $f(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$, $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(t) \geq 1 \quad \forall t \geq t_0$$

Segue che $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_0^{t_0} f(t)\,dt}_{\text{numero}} + \int_{t_0}^x f(t)\,dt \geq$

(posso supporre che $t_0 > 0$, e prendo $x > t_0$)

$$\geq \int_0^{t_0} f(t)\,dt + \int_{t_0}^x 1\,dt$$

$$= \int_0^{t_0} f(t)\,dt + x - t_0$$

Quindi $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt \geq \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\left(\int_0^{t_0} f(t)\,dt\right)}_{\text{numero}} + x \underbrace{- t_0}_{\text{numero}} \right) = +\infty$

Quindi $F(x)$ non è limitata superiormente $\Rightarrow$ non ha massimo.

Esercizio 8: $f(x) = \arctan(x) \cdot \arctan(3x)$.

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{o} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = ??$$

- f è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$.

- f è pari $\quad f(-x) = \arctan(-x)\cdot\arctan(-3x)$
$$= -\arctan(x)\cdot(-\arctan(3x))$$
$$= f(x).$$

- $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ (quindi per ogni x, visto che ($e = 0$ solo per $x=0$) è pari).

Come si comporta $f(x)$ a $+\infty$? $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)\cdot\arctan(3x)$
$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Da questo segue già che $\int_0^{+\infty} f(x)dx = +\infty$

Usiamo C.A. con $g(x) = 1 \quad g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{4}$ finito e $\neq 0$.

Quindi $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ si comporta come $\int_1^{+\infty} 1\,dx$

che diverge, perchè $1 = \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha = 0$

$\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx \text{ converge} \iff \alpha > 1\right)$

(oppure $\int_1^{+\infty} 1\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M 1\,dx = \lim_{M\to+\infty}(M-1) = +\infty.$)

Quindi $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ diverge positivamente.

e di conseguenza anche $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ diverge positivamente (visto che f e' pari). (a)

$\left(f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x)| = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \right)$

Esercizio 9 : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\log x} \, dx$. $\quad f(x) = \dfrac{1}{\log x}$

- domino? $\log x \neq 0 \rightsquigarrow x \neq 1$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\log x} = -\infty$$

(notare che $f(x) < 0$ su $x \in [\frac{1}{2}, 1)$.)

unico problema dell'integrale e' in $x = 1$.

Come si comporta $f(x)$ per $x \to 1^-$

Bisogna sviluppare $\dfrac{1}{\log x}$ attorno a $x = 1$.

$\log(\underbrace{1+t}_{x}) = t + o(t)$. per $\underset{x \to 1}{t \to 0}$ $\quad (t \to 0^-)$ $\quad (x \to 1^-)$

$\log(x) = x-1 + o(x-1)$.

$1+t = x$

$t = x-1$

$$f(x) = \frac{1}{x-1+o(x-1)} \sim \frac{1}{x-1}$$

per $x \to 1^-$

C.A. con $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, per $x \to 1^-$.

(notare: $f(x) < 0$ per $x \in [\frac{1}{2}, 1)$, e anche $g(x) < 0$ - -)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x-1+o(x-1)}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(1+o(1))} \xrightarrow{\text{per } x\to 1^-} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{finito} \\ \text{e} \neq 0}}{1}$$

Quindi per C.A.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx \quad \text{si comporta come} \quad \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x-1}\,dx,$$

che sappiamo divergere (negativamente)

$$\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{M\to 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^{M} \frac{1}{x-1}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ t=x-1 \\ dt=dx}}{=} \lim_{M\to 1^-} \int_{-\frac{1}{2}}^{M-1} \frac{1}{t}\,dt \right.$$

$$\left. = \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{t}\,dt}_{\text{diverge negativam.}} \right)$$