ESERCITAZIONE 01/02

Esercizio 10:

$$a_n = \frac{n!\,e^{2n} + \sin(n!)}{n^n + e^n}$$

$-1 \leq \sin(n!) \leq 1$, quindi

$$\frac{n!\,e^{2n} - 1}{n^n + e^n} \leq a_n \leq \frac{n!\,e^{2n} + 1}{n^n + e^n}$$

A numeratore il termine "dominante" è $n!\,e^{2n}$, mentre a denominatore è n^n (perché se $n \geq 3$, allora $n \geq e$ quindi $n^n \geq e^n$ e si ha anche

$$\frac{n^n}{e^n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \rightarrow \text{"}(+\infty)^{+\infty}\text{"} = +\infty \text{)}$$

Vediamo ad esempio

$$\frac{n!\,e^{2n} - 1}{n^n + e^n} = \frac{n!\,e^{2n}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{n!\,e^{2n}}}_{\to 0}\right)}{n^n\left(1 + \left(\frac{e}{n}\right)^n\right)}$$

$$\left(\frac{e}{n}\right)^n = \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^{-1} \rightarrow 0$$

Quindi il limite sarà uguale a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,e^{2n}}{n^n}$

Se $b_n = \frac{n!\,e^{2n}}{n^n}$, uso il criterio del rapporto:

considero

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \underbrace{\frac{(n+1)!\,e^{2(n+1)}}{(n+1)^{n+1}}}_{b_{n+1}} \cdot \underbrace{\frac{n^n}{n!\,e^{2n}}}_{b_n^{-1}} =$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}\cdot e^{\cancel{2n}+2}}{(n+1)^{n\cancel{+1}}}\cdot\frac{n^n}{\cancel{n!}\,\cancel{e^{2n}}} =$$

$$= \frac{e^2\cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{e^2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{e^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{e^2}{e} = e > 1$$

($\uparrow$ "~~ℓ~~" del criterio del rapporto)

Per il criterio concludo

che $b_n \to +\infty$.

Visto che $a_n \geq \frac{n!\,e^{2n}-1}{n^n+e^n} = b_n$ e $b_n \to +\infty$,

concludo che anche $a_n \to +\infty$ per confronto.

L'esercizio chiede:

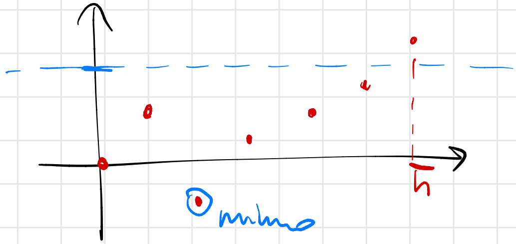
a_n ha massimo? NO perché $\to +\infty$.

è limitata? NO " " "

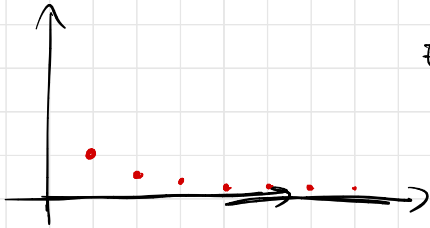
è debolmente decrescente? NO

(d) è inferiormente, ma non superiorm. limitata ✓.

in realtà si può anche dire che ammette minimo, perché tende a $+\infty$



Attenzione! in generale una succ. può essere inf. limitata ma non ammettere minimo $a_n = \frac{1}{n} \to 0$.



È inf. limitata, ma non ammette minimo.

Esercizio 7:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/n^2}-1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}} = \frac{e^0-1}{\sin(0)-0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

forma indetermin.

In questo caso sembra sensato considerare

$$f(x) = \frac{e^{1/x^2}-1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}$$

e provare a calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x^2}-1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}$$

Se questo esiste, il limite che devo calcolare è uguale a questo (per il teo. visto a lezione)

Sostituiamo $t=\frac{1}{x}$. Quando $x\to+\infty$, $t\to 0^+$

e dobbiamo calcolare $\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{t^2}-1}{\sin t - t}$.

Sviluppiamo con Taylor: $e^{t^2}=1+t^2+o(t^2)$

$$\sin t = t + o(t^2)$$

Quindi trovo $$\frac{e^{t^2}-1}{\sin t - t} = \frac{\cancel{1}+t^2+o(t^2)-\cancel{1}}{\cancel{t}+o(t^2)-\cancel{t}} =$$

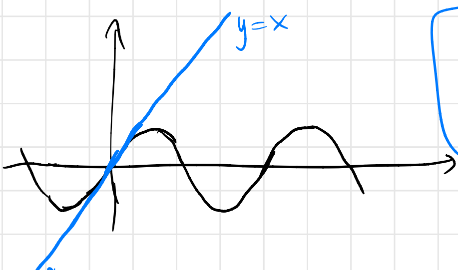
$$= \frac{t^2+o(t^2)}{o(t^2)} = \frac{\cancel{t^2}\,(1+o(t^2))}{\cancel{t^2}\,(o(t^2))} \to \frac{1}{0} = \pm\infty$$

quale dei due??

Guardiamo un po' al segno di $f(t)$ quando $t>0$:

$f(t)=\frac{e^{t^2}-1}{\sin t - t}$.

$e^{t^2}-1 \geq 0$ perché $t^2\geq 0$ quindi $e^{t^2}\geq e^0=1$.



$$\boxed{\begin{array}{c}\sin t \leq t \\ \forall t>0\end{array}}$$

$\leftarrow$ si può verificare con un rapido studio della funzione $g(t)=\sin t - t$.

tangente al grafico di $\sin(x)$ in $x=0$: $\sin'(0)=\cos(0)=1$

Quindi il denominatore é ≤ 0, e il limite deve essere $-\infty$. (e questo e' anche il limite della successione).

Alternative:

- de l'Hopital: $f(t) = \dfrac{e^{t^2}-1}{\sin t - t}$: $\dfrac{2te^{t^2}}{\cos t - 1} \longrightarrow \dfrac{0}{0}$

applichiamolo di nuovo $\dfrac{2e^{t^2} + 4t^2 e^{t^2}}{-\sin t} =$

$$= \frac{e^{t^2}(2+4t^2)}{-\sin t} \xrightarrow[t \to 0^+]{} \frac{e^0 \cdot (2+0)}{0} = \frac{2}{0}$$

per $t>0$ e "piccolo", $\sin t > 0$

$\Rightarrow -\sin t < 0$,

e quindi $-\sin t \to 0^-$ per $t \to 0^+$

quindi il limite e' $\dfrac{2}{0^-} = -\infty$.

- Sviluppando a ordine 3: $e^{t^2} = 1 + t^2 + o(t^3)$

$\sin(t) = \cancel{1} + t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)$

$$\Rightarrow \frac{e^{t^2}-1}{\sin(t) - t} = \frac{t^2 + o(t^3)}{-\frac{t^3}{6} + o(t^3)} = \frac{\cancel{t^2}(1+o(t))}{\cancel{t^2}\left(-\frac{t}{6} + o(t)\right)}$$

$$= \frac{1}{t} \cdot \frac{(1+o(t))}{\left(-\frac{1}{6}+o(1)\right)}$$

$\dfrac{1}{t} \to +\infty$

$\dfrac{(1+o(t))}{\left(-\frac{1}{6}+o(1)\right)} \to \dfrac{1}{-\frac{1}{6}} = -6$

$+\infty \cdot (-6) = -\infty$

- $\sin(t) \leq t \quad \forall t > 0$:

$g(t) = \sin(t) - t$. $g(0) = \sin(0) - 0 = 0$.

e $g'(t) = \cos(t) - 1$, che è sempre ≥ 0

$(\cos(t) \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R})$

quindi $g(t)$ è (strettamente) crescente,

dunque $g(t) > g(0) = 0 \quad \forall t > 0$.

(allo stesso modo $e^t \geq 1 + t \quad \forall t \in \mathbb{R}$, etc.)

Esercizio 6 : $a_n = \dfrac{3^n - 100n^2 + n + 1}{n!} = \dfrac{+\infty - \infty + \infty + 1}{+\infty}$??

Chi vince a numeratore? Vince l'esponenziale (base > 1)

$$3^n - 100n^2 + n + 1 = 3^n \left(1 - \frac{100n^2 - n - 1}{3^n}\right) \longrightarrow +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$\dfrac{100n^2 - n - 1}{3^n} \to 0$

$\left(\lim_{x \to +\infty} \dfrac{p(x)}{3^x} = 0 \right.$ dove $p(x)$ è un polinomio di grado qualsiasi $\left.\right)$

Quindi abbiamo una forma indet. $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

Sotto c'è $n!$, che sappiamo andare a $+\infty$ più velocemente di 3^n, quindi

$$\frac{3^n - 100n^2 + n + 1}{n!} = \frac{3^n\left(1 - \frac{100n^2 - n - 1}{3^n}\right)}{n!}$$

$$= \frac{3^n}{n!} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{100n^2 - n - 1}{3^n}\right)}_{\downarrow\, 1} \to 0 \cdot 1 = 0$$

$\frac{3^n}{n!} \to 0$ (visto a lezione)

Quindi $a_n \to 0$. Cosa si può concludere riguardo a massimi e minimi?

Fatto: • se $a_n \to l$, e $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} \geq l$, allora $\{a_n\}$ ha massimo.

(e se $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_1} \leq l$, allora $\{a_n\}$ ha minimo)

Nel nostro caso, scriviamo i primi termini della successione:

$$a_0 = \frac{3^0 - 100\,0^2 + 0 + 1}{0!} = \frac{1+1}{1} = 2 > l = 0$$

posso già concludere che $\{a_n\}$ ha massimo.

$$a_1 = \frac{3^1 - 100 \cdot 1^2 + 1 + 1}{1!} = \frac{3 - 100 + 2}{1} = -95 \leq l = 0$$

quindi $\{a_n\}$ ha anche minimo.

Quindi ho sia massimo che minimo.

Esercizio 9: $A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 10 \log(n+2) < 0 \}$

Bisogna capire che segno ha $a_n = n^2 - 10 \log(n+2)$ quando n diventa grande.

Calcoliamo $\lim_{n \to +\infty} n^2 - 10 \log(n+2) = +\infty - 10 \cdot (+\infty)$ f. indet.

$$n^2 - 10 \log(n+2) = n^2 \left(1 - \frac{10 \log(n+2)}{n^2}\right) \to +\infty \cdot (1 - 0) = +\infty$$

perché $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x+2)}{x^2} = 0$ (ad. esempio usando de l'Hop)

quindi anche

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log(n+2)}{n^2} = 0.$$

Concludo che $n^2 - 10 \log(n+2) \geq 0$ definitivamente.

Quindi A e' limitato superiormente, e ha anche massimo, perché e' un sottoinsieme limitato di $\mathbb{N}$.

Esercizio 3: $\lim_{n \to +\infty} \frac{n! \, e^{n \log n}}{(2n)!} = ?$ $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$e^{n\log n} = e^{\log(n^n)} = n^n \qquad \frac{n!\, e^{n\log n}}{(2n)!} = \frac{n!\, n^n}{(2n)!} = a_n$$

Criterio del rapporto: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!\,(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \dfrac{(2n)!}{n!\,n^n}$

$$= \frac{(n+1)\cdot \cancel{n!}\,(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{\cancel{n!}\,n^n} =$$

$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)\underbrace{(2n)(2n-1)\cdots}_{=(2n)!}$

$$= \frac{(n+1)(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)^{n+1}}{(2n+2)(2n+1)\,n^n} = \frac{(n+1)(n+1)(n+1)^n}{(2n+2)(2n+1)\,n^n} =$$

$$= \underbrace{\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}}_{\to \frac{1}{4}} \cdot \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e} \longrightarrow \frac{e}{4} < 1$$

Per il criterio del rapporto, $a_n \to 0$.

Esercizio 4: $a_n = n(1+(-1)^n) + n^2$

- Usare pari e dispari: $a_{2n} = 2n(1+(-1)^{2n}) + 4n^2$
$$= 2n \cdot 2 + 4n^2 \to +\infty$$

$$a_{2n+1} = (2n+1)\left(1+(-1)^{2n+1}\right)+n^2$$
$$= (2n+1)\cdot\left(1+(-1)\right)+n^2 = 0+n^2 \longrightarrow +\infty$$

Visto che i pari e dispari saturano tutti gli indici, concludo che $a_n \to +\infty$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ho $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, quindi

$$\underbrace{n(0)+n^2}_{= n^2} \leq a_n \leq n(1+1)+n^2$$

e ora visto che $n^2 \to +\infty$, per confronto anche $a_n \to +\infty$.

Esercizio 8 : $a_n = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + (-1)^n}{n \log n}$

Entrambi i metodi dell es. precedente funzionano.

- $a_{2n} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+1}{n\log n} \longrightarrow \dfrac{0+1}{+\infty} = 0$

$$a_{2n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}-1}{n\log n} \longrightarrow \frac{0-1}{+\infty} = 0$$

Quindi $a_n \to 0$.

- $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ quindi

$$\underbrace{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{n \log n}}_{\downarrow \atop 0} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{n \log n}}_{\downarrow \atop 0} \Longrightarrow \text{per carabinieri } a_n \to 0.$$