ESERCIZI 03/04

Esercizio 10 :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\log(x^2+y^2) + \arctan\left(\frac{y}{|x|+|y|}\right)\right)$$

quando $(x,y)\to(0,0)$ entrambe x e y tendono a 0, quindi anche $x^2+y^2 \to 0$, e $\log(x^2+y^2) = \log(t) \to -\infty$

$t = x^2+y^2$ con $t\to 0$

$\frac{y}{|x|+|y|}$ dà una forma indeterminata $\frac{0}{0}$

(e il limite di questa espressione dipende da come ci si avvicina a $(0,0)$).

però arctan (qualsiasi cosa) è una funzione limitata (tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$), quindi la somma

$$\log(x^2+y^2) + \arctan(\text{roba})$$

tenderà a $-\infty$.

Formalmente, notiamo che

$$\underbrace{\log(x^2+y^2) - \frac{\pi}{2}}_{\downarrow \atop -\infty - \frac{\pi}{2} = -\infty} \le \log(x^2+y^2) + \arctan\left(\frac{y}{|x|+|y|}\right) \le \underbrace{\log(x^2+y^2) + \frac{\pi}{2}}_{\downarrow \atop -\infty + \frac{\pi}{2} = -\infty}$$

quindi per il teorema dei carabinieri, abbiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\log(x^2+y^2) + \arctan\left(\frac{y}{|x|+|y|}\right)\right) = -\infty$$

Domanda: e se non ci fosse stato arctan?

cioè guardiamo $\log(x^2+y^2) + \frac{y}{|x|+|y|}$

$$\left|\frac{y}{|x|+|y|}\right| \leq 1 \iff |y| \leq |x|+|y|$$

$(x,y)\neq(0,0)$

vero perché $|x| \geq 0$.

Quindi si applica lo stesso discorso.

(Se invece di $\log(x^2+y^2)$ ci fosse un'espressione che ammette limite finito (ad esempio x^2+y^2), allora il limite non esisterebbe!)

(se anche dentro arctan ci fosse stata una funzione non limitata, ad esempio $e^{+\frac{1}{x^2+y^2}}$, il discorso di sopra funzionava lo stesso)

Esercizio 9 :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^2+y^2} = ?$$

Una delle prime cose da provare è fare il limite lungo le rette passanti per $(0,0)$, cioè sostituire $y = mx$ per un qualche $m \in \mathbb{R}$. (esclude l'asse y, ma va bene ...)

La funzione diventa
$$\frac{x^4 - m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{\cancel{x^2}(x^2-m^2)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} =$$
$$= \frac{x^2-m^2}{1+m^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-m^2}{1+m^2}$$

il limite dipende da m, quindi il limite "in due variabili" non esiste.

Si può anche usare il metodo delle coordinate polari.

$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, e la funzione diventa

$$f(\theta,\rho) = \frac{\rho^4\cos^4\theta - \rho^2\sin^2\theta}{\rho^2} = \underbrace{\rho^2\cos^4\theta - \sin^2\theta}_{\downarrow\ \rho\to 0 \ \ -\sin^2\theta}$$

e il limite dipende da θ $\Longrightarrow$ il limite "in due variabili" non esiste.

Esercizio 7

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}, \sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\right)$$

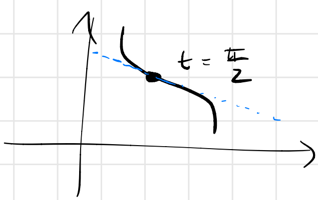
retta tangente nel punto corrispondente a $t = \frac{\pi}{2}$.

(il sostegno di γ e' la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$)

Il punto del sostegno di γ corrispondente a $t = \frac{\pi}{2}$

ha coordinate $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$$= \left(\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (1,1)$$



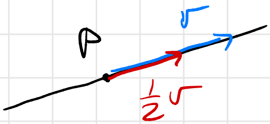
Il vettore direzione della retta tangente a γ nel punto t

e' $\dot{\gamma}(t) = (x'(t), y'(t)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per la nostra } \gamma(t)}}{=} \left(\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\sin\frac{t}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}\right)$

Quindi in $t = \frac{\pi}{2}$ trovo $\dot{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$



il vettore direzione si può riscalare, quindi posso prendere $(-1, 1)$

La retta passante per il punto $(1,1)$ e con vettore direzione $(-1,1)$.

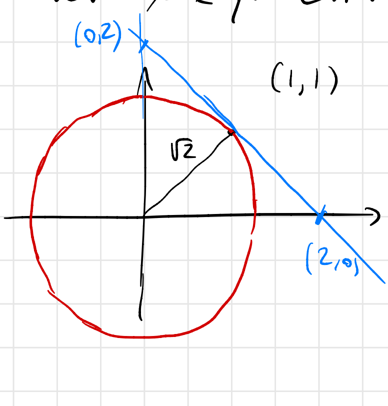
Equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = 1 + s \cdot (-1) \\ y = 1 + s \cdot (1) \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Per trovare una equazione cartesiana, elimino s dal sistema: $x = 1 - s \Longrightarrow s = 1 - x$

e sostituisco nella seconda equazione

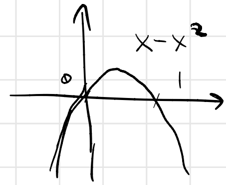
$$y = 1 + s = 1 + (1 - x) = 2 - x$$

quindi l'eq. cartesiana è $x + y = 2$.

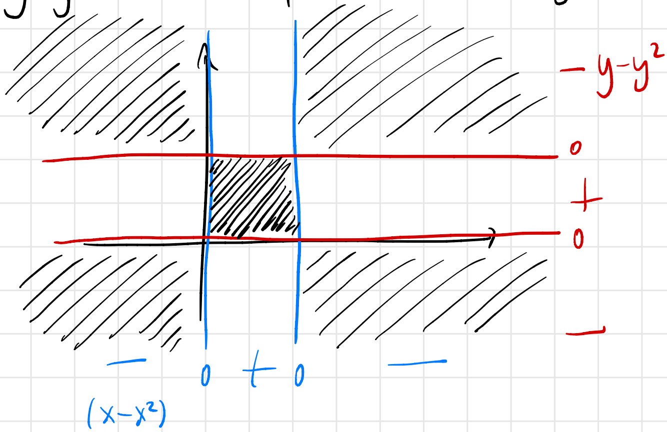


Esercizio 1 : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x^2)(y-y^2) > 0\}$

$x - x^2 > 0$ quando $0 < x < 1$



$y - y^2 > 0$ quando $0 < y < 1$.



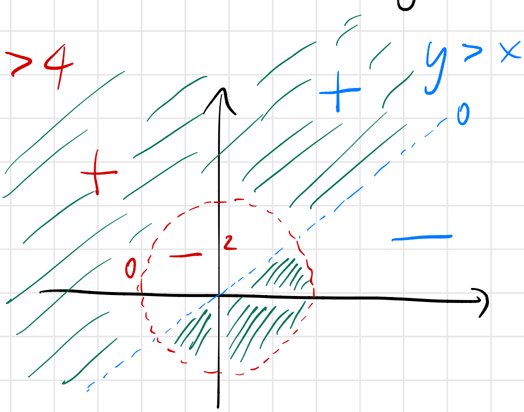
(bordo escluso)

Esercizio 2 : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2-4)(y-x) > 0\}$

Capire come sono fatti gli insiemi delle sol di

$x^2+y^2-4 > 0$ e $y - x > 0$

$x^2+y^2 > 4$



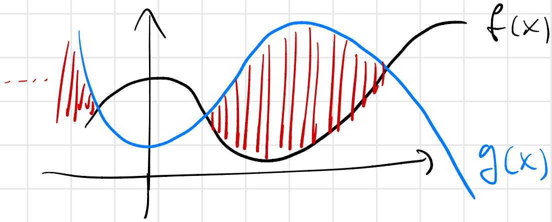
Esercizio 3:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-1| \le y \le 2-|x-2|\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \le y \le g(x)\}$$

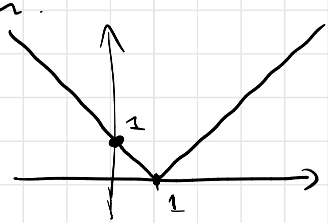
$$\left(f(x) = |x-1| \qquad g(x) = 2-|x-2| \right)$$

Se disegniamo i grafici di $f(x)$ e $g(x)$, poi la regione si vede facilmente

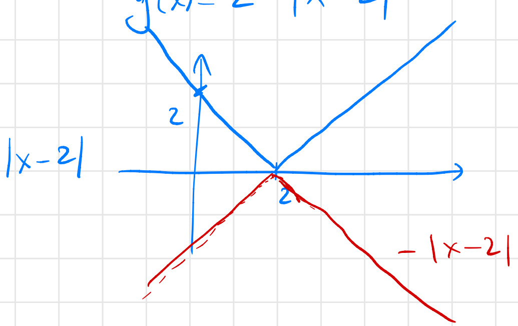


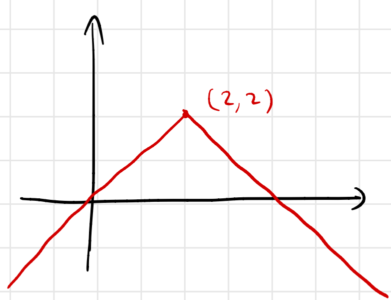
Quindi disegniamo i grafici.

$f(x) = |x-1|$

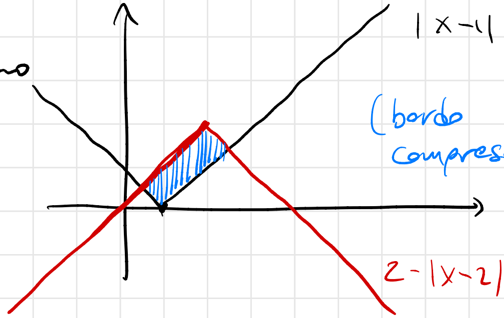


$g(x) = 2-|x-2|$





Mettiamoli sullo stesso piano



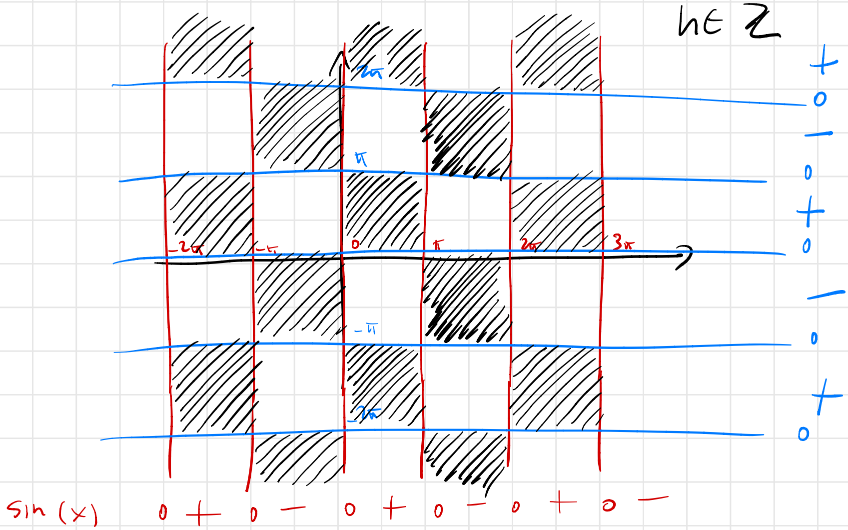
Esercizio 4 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\sin x)(\sin y) \geq 0\}$

$\sin x \geq 0$ per $2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi$

$k \in \mathbb{Z}$

$\sin y \geq 0$ per $2h\pi \leq y \leq 2h\pi + \pi$

$h \in \mathbb{Z}$



(bordi compresi)

Esercizio 5 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x^2+y^2-1) > 0\}$

$\sin(t) > 0$ se $2k\pi < t < 2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

quindi $\sin(x^2+y^2-1) > 0$ se $2k\pi < x^2+y^2-1 < 2k\pi+\pi$

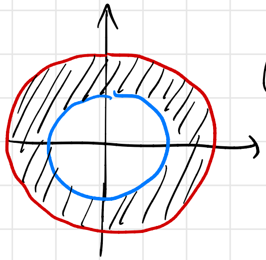
$x^2+y^2-1 = 2k\pi$

$x^2+y^2 = 2k\pi+1$

definisce una circonferenza di raggio $\sqrt{2k\pi+1}$ e centro $(0,0)$ (supponendo che $2k\pi+1 \geq 0$!)

$x^2+y^2 > 2k\pi+1$ individua l'area esterna alla circonf.

$x^2+y^2 < 2k\pi+\pi+1$ descrive l'area interna alla circonf. di raggio $\sqrt{2k\pi+\pi+1}$



(bordo escluso).

Aumentando $k \in \mathbb{Z}$ (con $2k\pi+1 \geq 0$) entrambi i raggi aumentano

$\Longrightarrow$ ho infinite corone circolari.

Esercizio 6: che cos'è il sostegno di $\gamma(t) = (t^2, 2t^2)$, $t \in [0,1]$

È un segmento. Per trovare l'equazione cartesiana, si può provare a "eliminare

il parametro"
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t^2 \end{cases}$$

segue che $y = 2t^2 = 2x$, e $y = 2x$
descrive una retta.

Dato che $t \in [0,1]$, abbiamo un segmento.

(era uguale se avevamo $\gamma(t) = (e^t, 2e^t)$

oppure anche $\gamma(t) = (f(t), 2f(t))$

con $f(t)$ continua)

Esercizio 8: Cosa sono gli insiemi di livello di $f(x,y) = \frac{3y}{x}$?

L'insieme di livello "a quota k" è dato dall'equazione

$$\frac{3y}{x} = k, \quad \text{cioè} \quad 3y = kx \Rightarrow y = \left(\frac{k}{3}\right)x$$

$(x \neq 0)$

retta privata di un punto perché $x \neq 0$.