Limiti e continuità

Esercizio $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \boxed{\dfrac{x^4+y^3}{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ \cancel{a} \; 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ funz. continua in $(0,0)$

Trovare $a \in \mathbb{R}$ t.c. f continua in $(0,0)$

$\Updownarrow$

SOLUZIONE: cerco $a \in \mathbb{R}$ (esiste?) t.c.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = a = f(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2} \qquad \frac{0}{0} \qquad \text{F.I.}$$

coordinate polari (ρ, θ)

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad = \quad \lim_{\rho\to 0}$$

$$f(x,y) = \frac{\rho^4\cos^4\rho + \rho^3\sin^3\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} = \frac{\rho^4\cos^4\rho + \rho^3\sin^3\theta}{\rho^2}$$

$$\parallel$$

$$f(\rho, \theta)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta)$$

$$f(\rho,\theta) = \frac{\cancel{\rho^2}\left(\rho^2\cos^4\theta + \rho\sin^3\theta\right)}{\cancel{\rho^2}}$$

$$f(\rho,\theta) = \underbrace{\rho^2\cos^4\theta}_{\xrightarrow{\rho\to 0}\, 0} + \underbrace{\rho\sin^3\theta}_{\xrightarrow{\rho\to 0}\, 0} \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

$$f(\rho,\theta) \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} |\cos^4\theta| \le 1 & \forall\theta \\ |\sin^3\theta| \le 1 & \forall\theta \end{array}\right\}$$ funzioni limitate $\forall\theta,\rho$

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

f è continua in $(0,0) \Leftrightarrow \boxed{a = 0}$

$a = f(0,0)$

Finora

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$$

$(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ fissato , $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

OSS

$f: \Omega \to \mathbb{R}$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$

stessa definizione

ma

(x_0,y_0) deve essere pt. di accumulazione per Ω

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Come si estende

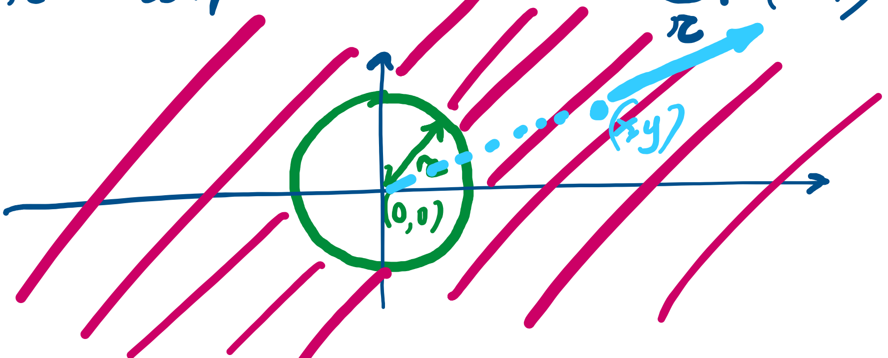
$$\lim_{(x,y) \to \infty} f(x,y) = l \ ?$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} f(x) = l$$

$\to$ Cosa vuol dire che $(x,y) \to \infty$

Ricordiamo

Intorno di raggio r di ∞ è il complementare di $B_r(0,0)$



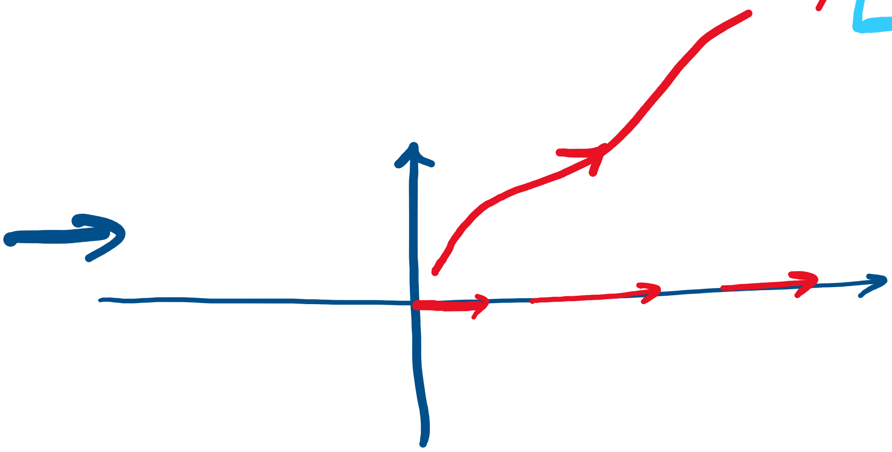
$$\boxed{(x,y)\to\infty} \iff 1)\ \boxed{d\big((x,y),0\big)\to+\infty}$$

oppure

$$2)\ \boxed{x^2+y^2\to+\infty}$$

oppure

$$3)\ \boxed{\rho\to+\infty}$$



$y=0$ $\quad \cancel{x^2+y^2}\to+\infty$

$x\to+\infty$

Def Si dice che

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)=\ell\in\mathbb{R}}$$

se

se $\forall\,\varepsilon>0$ esiste un intorno di ∞ t.c.

se $(x,y)\in$ intorno allora

$$|f(x)-\ell|\le\varepsilon$$

raggio dell'intorno di ∞

se $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$ t.c. se

$(x,y)\notin B_\delta(0,0)$ allora

$$|f(x,y)-\ell|\le\varepsilon$$

Def Si dice che

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty \ (-\infty)}$$ se

$\forall\, M>0 \quad \exists\, \delta>0$ t.c.

$\forall\, (x,y) \notin B_\delta(0,0)$ vale

$$f(x,y) \geq M$$

$$\big(f(x,y) \leq M \big)$$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$	$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$

$\downarrow$ intorno di (x_0,y_0)

$\hookrightarrow \exists\, \delta>0$ t.c.

$\forall\, (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0)\setminus\{(x_0,y_0)\}$

$\downarrow$ intorno di ∞

$\hookrightarrow \exists\, \delta>0$ t.c.

$\forall\, (x,y) \notin B_\delta(0,0)$

Anche nel caso di $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$

- se esistono due direzioni con limite diverso $\longrightarrow \nexists \lim$
- le coordinate polari possono semplificare il calcolo.

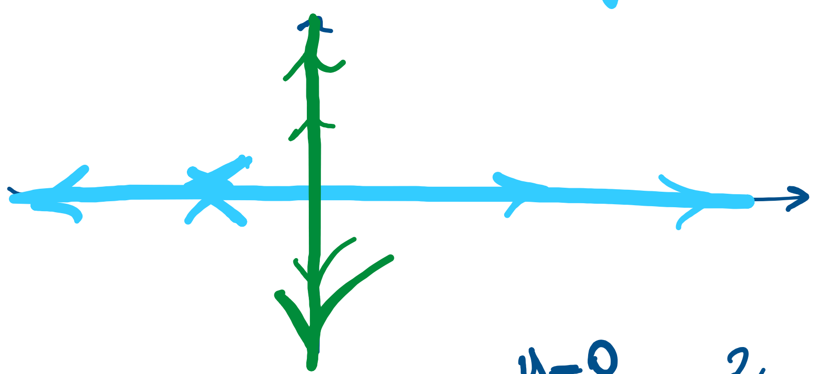
Esempio

1) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{y^6}{1+x^2+y^2}$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} \Longleftrightarrow \lim_{\rho\to+\infty} \Longleftrightarrow \lim_{d((x,y),0)\to+\infty}$$

. Scelgo come direzione di avvicinamento a ∞ l'asse x $\Longleftrightarrow$ $y=0$



$$(x,y)\to\infty \overset{y=0}{\Longleftrightarrow} x^2\to+\infty \quad (\cancel{x^2+y^2}\to+\infty) \Longleftrightarrow d((x,\underset{y=0}{0}),(0,0))\to+\infty$$

$$f(x,y) = \frac{y^6}{1+x^2+y^2}$$

$$f(x,0) = \frac{0}{1+x^2} \xrightarrow[x^2\to0]{} 0 = \lim_{\substack{(x,y)\to\infty \\ \text{lungo asse } x}} f(x,y)$$

. Scelgo come direzione di avvicinamento all'∞ l'asse y $\Longleftrightarrow$ $\boxed{x=0}$

lungo questo asse

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = \lim_{y^2\to\infty} \frac{y^6}{1+y^2}$$

$\Updownarrow$

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y)$$

$$\lim_{y^2\to+\infty} \frac{y^6 = y^2\cdot y^2\cdot y^2}{1+y^2} = +\infty$$

$$t = y^2 \qquad \frac{t^3}{1+t}$$

$$t \to +\infty$$

$$\| $$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\infty \\ \text{lungo asse } y}} f(x,y)$$

	lungo asse y	lungo asse x
lim	$+\infty$	0

Ho trovato due direzioni con 2 diversi valori del limite

$\Downarrow$

$$\nexists \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$$

2) $\lim_{(x,y)\to\infty} x \cdot y \cdot e^{-(x^2+y^2)} = ?$

$\Updownarrow$

$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} \iff \lim_{\rho\to+\infty}$ (coord. polari) $\iff \lim_{d((x,y),(0,0))\to+\infty}$

Passiamo alle coordinate polari

$x = \rho\cos\theta$ $\quad x^2+y^2 = \rho^2$

$y = \rho\sin\theta$

$$f(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \cdot \rho\sin\theta \cdot e^{-\rho^2}$$

$$= \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \frac{\rho^2}{e^{\rho^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = \lim_{\rho\to+\infty} f(\rho,\theta)$$

$$\lim_{\rho\to+\infty} \frac{\rho^2}{e^{\rho^2}} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta = 0$$

$\sin\theta \cdot \cos\theta$ è limitato, indip. da ρ

0

$$\frac{\rho^2}{e^{\rho^2}} \to \cancel{\frac{+\infty}{+\infty}} \quad 0$$

$$\lim_{\rho\to+\infty} f(\rho,\theta) = 0 = \lim_{(x,y)\to\infty} xy \cdot e^{-(x^2+y^2)}$$

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

Analisi finora $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Def 1 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si dice che f è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ se

Rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ esiste ed è finito

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

Derivata (prima) di f in x_0

Def 2 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si dice che f è differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ se esiste un numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + o(h)}$$

per $h \to 0$

Teorema per $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (1D)

1) f è derivabile in x_0 $\Longleftrightarrow$ f è differenziabile in x_0 e $\alpha = f'(x_0)$

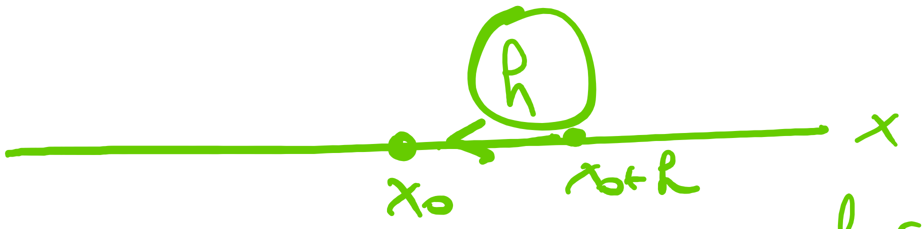
2) f è derivabile in x_0 $\longrightarrow$ f è continua in x_0

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

Come generalizzo questi concetti ad una funzione di più variabili (2) ?

1D



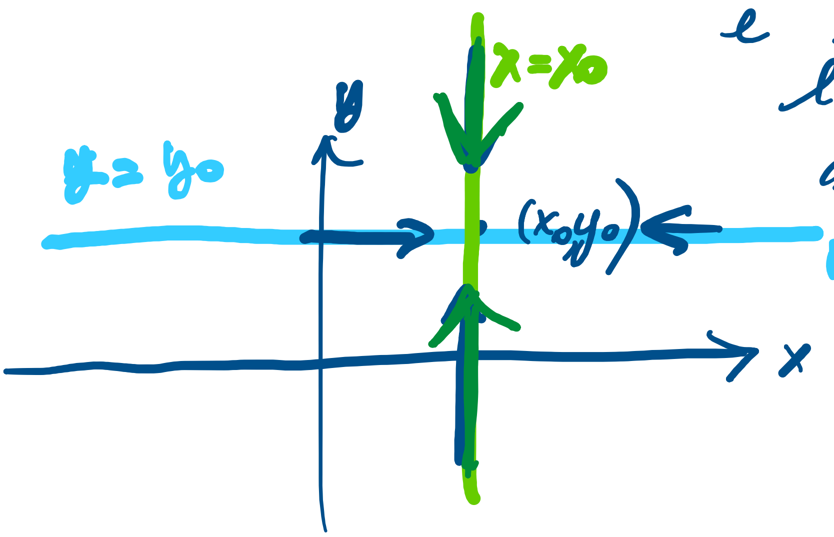
$f(x)$

in ~~più~~ 2D $\quad f(\underline{x, y})$

Derivata parziale $\longrightarrow$ teniamo fissa una variabile in $\mathbb{R}^2$ e lasciamo variare l'altra

↓

"parziale"



Guardiamo la funzione $f(x, y_0)$

Def $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto alla variabile $\underline{x}$ nel punto (x_0, y_0) se il

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

esiste ed è finito.

rapporto incrementale sulla sola variabile x

Def. Se tale limite esiste ed è finito, si dice derivata parziale rispetto alla variabile x di f in (x_0, y_0) e si indica con una delle seguenti notazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad f_x(x_0, y_0) \qquad D_x f(x_0, y_0)$$

1D

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

se $\exists$ finito

2D

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x_0+t}, y_0) - f(\underline{x_0}, y_0)}{t} = f_x(x_0, y_0)$$

se $\exists$ finito

Analogamente

Def Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto ad y nel punto (x_0, y_0) se

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

esiste finito

rapporto incrementale sulla sola variabile y

Def Se tale limite esiste finito, si dice derivata parziale di f in (x_0, y_0) rispetto alla variabile y, e si indica con:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad f_y(x_0, y_0) \qquad D_y f(x_0, y_0)$$

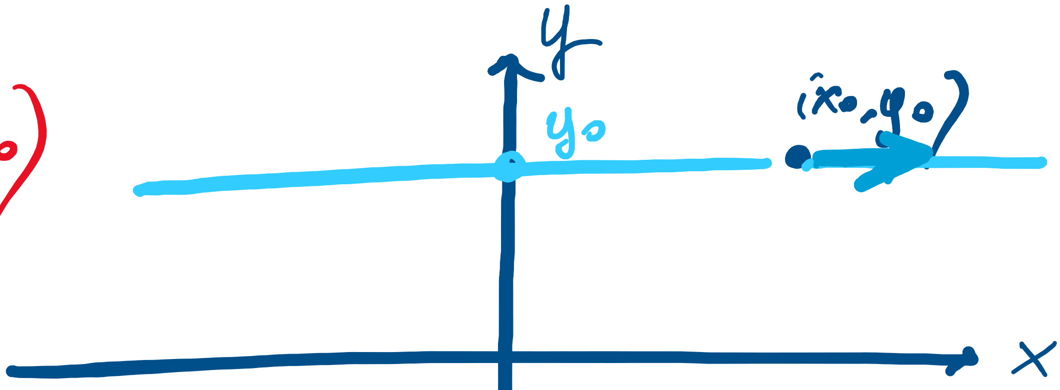
OSS I limiti coinvolti nella definizione di derivata parziale sono limiti in una variabile (in $\mathbb{R}$) ovvero

$$\lim_{t \to 0}$$

sulla retta reale

Geometricamente:

- $f_x(x_0, y_0)$



Consideriamo la retta // asse x e passante per (x_0, y_0): y_0 resta fissato e lascio variare x

↓

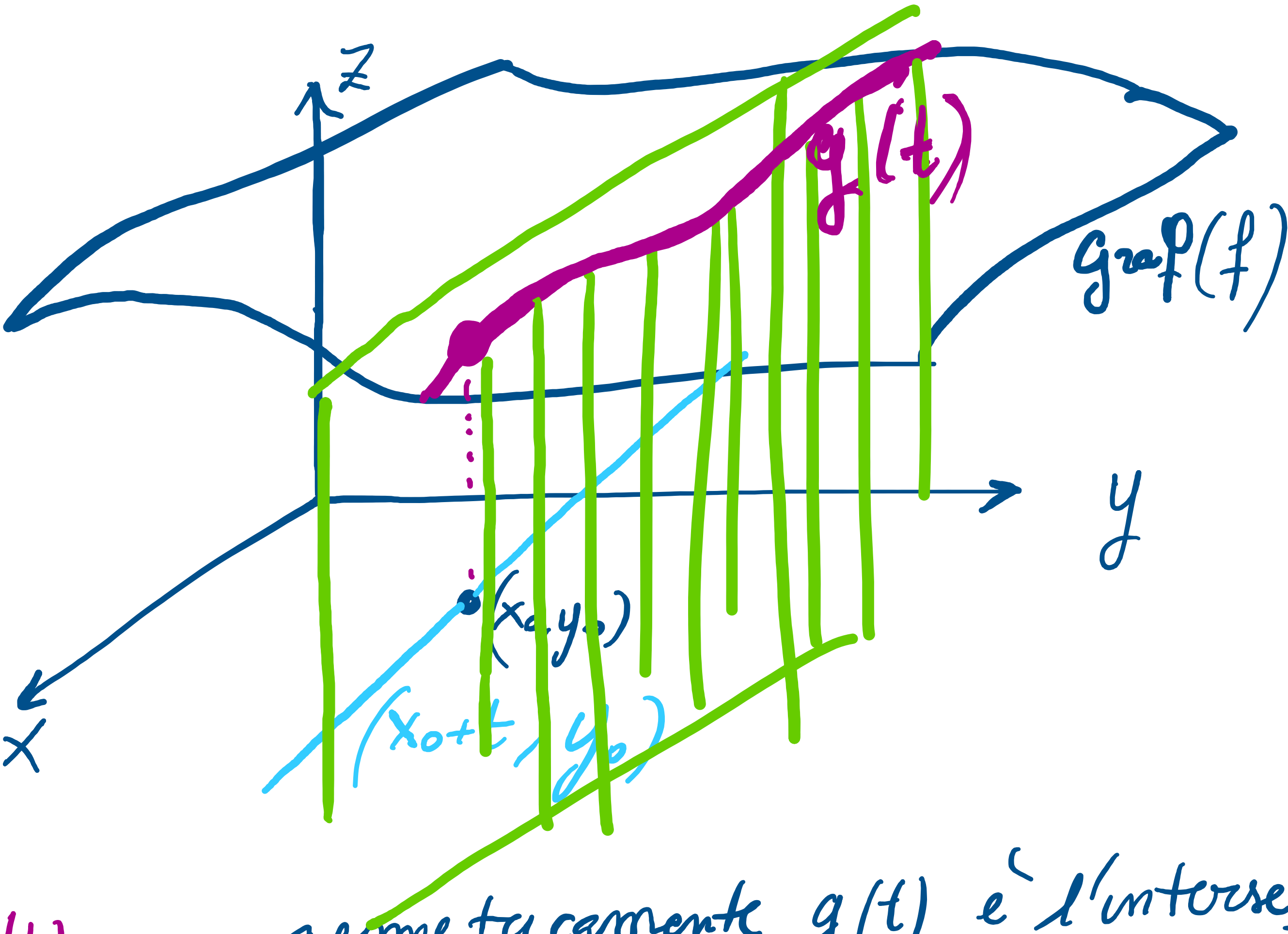
la sua equazione parametrica

$$(x_0, y_0) + t(1, 0) = \underline{(x_0 + t,\ y_0)}$$

Guardo la funzione f ristretta a questa retta

$$f(\underbrace{x_0 + t}_{= x},\ \underbrace{y_0}_{= y}) = \underline{g(t)}$$

mi muovo con il parametro t



$g(t) \rightarrow$ geometricamente $g(t)$ è l'intersezione del grafico di $f(x,y)$ con il piano $\perp$ al piano xy e contenente la retta (x_0+t, y_0)

La derivata di $g(t)$ in $t=0$

$g'(0)$

è proprio $f_x(x_0,y_0)$

$$\underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t}}_{g'(0)} = \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}}_{f_x(x_0,y_0)}$$

Analogamente per $f_y(x_0, y_0)$

$\hookrightarrow h(t) = f(x_0, y_0 + t)$

$$h'(0) = f_y(x_0, y_0)$$

Nel caso di $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \Rightarrow$ 2 derivate parziali

$f_x \, , \, f_y$

Def $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}^n$

$x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots x_{0n})$

Si dice derivata parziale di f rispetto alla variabile x_k

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t e_k) - f(x_0)}{t}}$$

se questo limite $\exists$ finito.

Se $\exists$ finito, tale limite viene indicato con

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$$

OSS

$x_0 \in R^n \qquad x_0 = (x_{01}, .\, x_{0k}.\,, x_{0n})$

$f(x_0 + t e_k)$

$\{e_1, \dots, e_n\}$ base canonica di $\mathbb{R}^n$

$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \rightarrow$ genera l'asse x_1

$e_2 = (0, 1, \dots, 0) \rightarrow$ " x_2

$e_k = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-esimo}}}{1}, 0 \dots 0)$

$e_n = (0, \dots \quad, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{1})$

$f(x_0 + t e_k)$

↳ aggiungo t solo sulla k-esima variabile

$\mathbb{R}^2 \rightarrow e_1, e_2$

$f(x_0 + t e_1) \rightarrow$ muoversi nella direzione x

↓

der. parziale rispetto ad x

$f(x_0 + t e_2) \rightarrow$ muoversi nella direzione y

$\downarrow$

der. parziali rispetto ad y

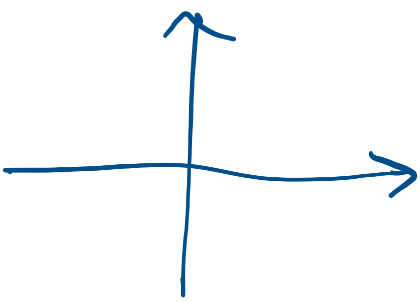
$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\uparrow$

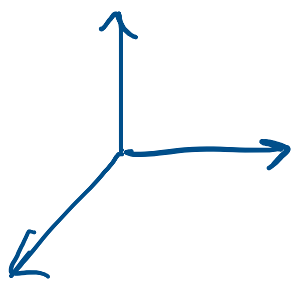
n direzioni $\Longleftrightarrow$ n vettori della base canonica

Una funzione di n variabili ha n derivate parziali

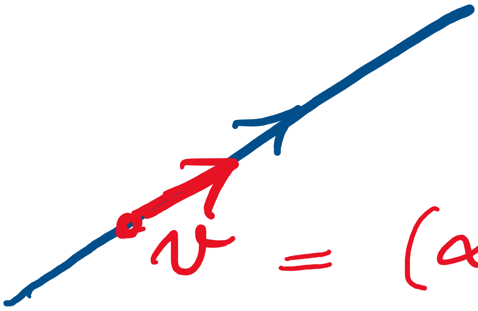
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$



$\mathbb{R}^n$



→ Derivata direzionale



$v = (\alpha, \beta)$