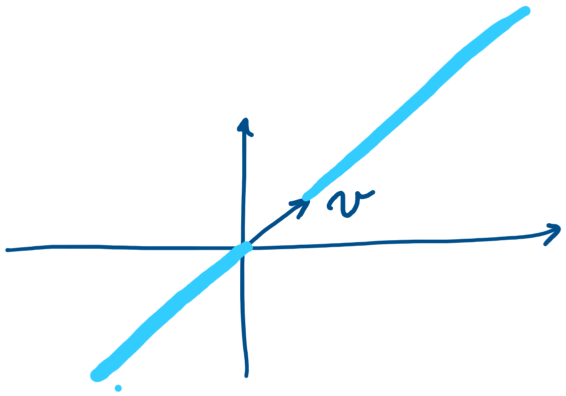
Derivata parziale

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ → esistono n derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad k=1,\dots,n$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$



→ derivata direzionale

Definizione $\mathbb{R}^2$

Sia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $v = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ un vettore di $\mathbb{R}^2$ non nullo $(\alpha^2+\beta^2 \neq 0)$

allora il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t\alpha, y_0+t\beta) - f(x_0,y_0)}{t}$$

se esiste ed è finito, si dice derivata direzionale di f in (x_0,y_0) rispetto alla direzione $v=(\alpha,\beta)$ e si indica con

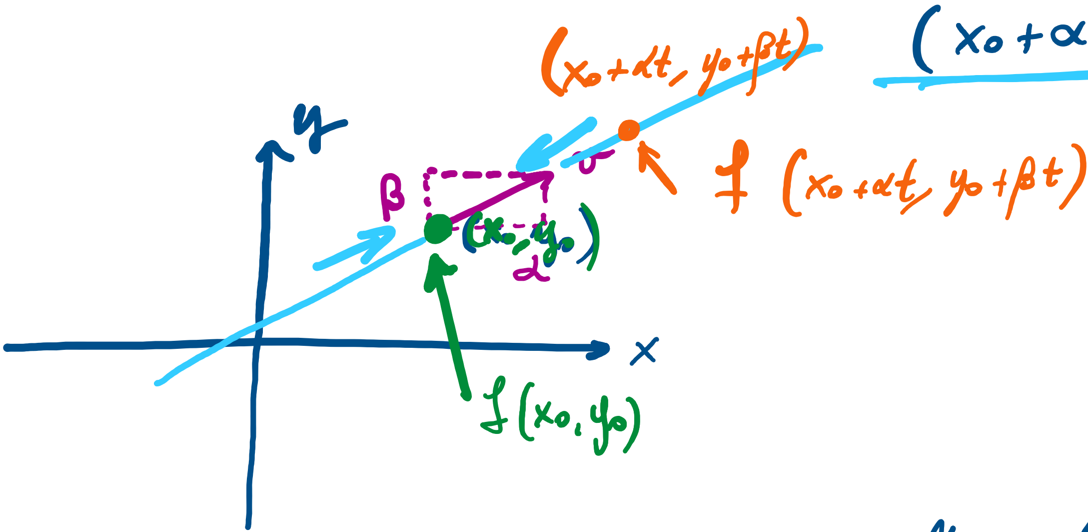
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0,y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Interpretazione geometrica

Derivata direzionale $\longleftrightarrow$ geometricamente corrisponde a muoversi lungo la retta di equazione parametrica

$$(x_0, y_0) + t(\alpha, \beta) = (x_0 + \alpha t,\ y_0 + \beta t)$$



derivata direzionale rispetto alla direzione v in (x_0, y_0)

$\updownarrow$

restringere la funzione alla retta

e calcolarne la derivata rispetto a t nel punto $t=0$

$\updownarrow$

Definiamo $g(t) = f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta)$

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

der. nel senso 1D

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}}_{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)}$$

per definizione di der. 1D

$v = (\alpha, \beta)$

$g(t)$ è la funzione che ottengo intersecando il grafico di f con il piano $\perp$ al piano xy e contenente la retta passante per (x_0,y_0) e con direzione v.

Def $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$

$x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots x_{0k}, \dots x_{0n})$

$\underline{v} \in \mathbb{R}^n$

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ $\quad v \neq 0$

$$\underset{\in \mathbb{R}^n}{\frac{\partial f}{\partial v}} \underset{\in \mathbb{R}^n}{(x_0)} = \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{f(\underline{x_0 + tv}) - f(x_0)}{t}}$$

se esiste finito

$$x_0 + tv = (x_{01} + t v_1, x_{02} + t v_2, \dots\dots, x_{0n} + t v_n)$$

OSS Anche le derivate direzionali sono definite tramite limiti in una variabile (t parametro della retta di direzione v e passante per $x_0 \in \mathbb{R}^n$ / $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$)

Gradiente

Def $f: \underline{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$

Si dice **gradiente** di $f(x,y)$ in (x_0,y_0) $\in \mathbb{R}^2$ il vettore che ha come componenti le derivate parziali di f in $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ e si indica con

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

↳ nabla

Def $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n \ni \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots\ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

Differenziabilità

1D $\quad x_0 \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si dice f è DIFFERENZIABILE in x_0 se esiste un numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + o(h) \quad \text{per } h \to 0$$

$h \in \mathbb{R}$

funz. differenziabile in più variabili

Def

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \to (x_0 + h, y_0 + k)$

si dice che f è differenziabile nel punto (x_0, y_0) se esistono due numeri reali α e β t.c.

$$\boxed{f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \alpha \cdot h + \beta \cdot k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)}$$

$\mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R}$

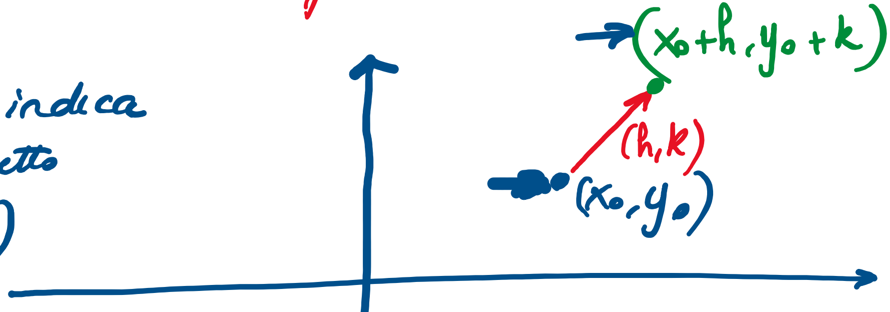
$$\mathbb{R} \ni \langle (\alpha, \beta), (h,k) \rangle$$

prodotto scalare

devono esistere per avere la differenziabilità di f

spostamento rispetto al punto (x_0,y_0)

Il vettore (h,k) indica lo spostamento rispetto al punto (x_0,y_0)



$\sqrt{h^2+k^2}$ = lunghezza di (h,k) = lunghezza dello spostamento

OSS $\quad o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$?

Quando scrivo $o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$ significa che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

limite in due variabili

1D $\to o(h) \qquad x_0+h$

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}^2 \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

Def $\quad f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \qquad x_0\in\mathbb{R}^n$

Una funzione $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ si dice *differenziabile* nel punto $x_0\in\mathbb{R}^n$ se esiste un vettore $\alpha\in\mathbb{R}^n$ (devono esistere n numeri reali $\alpha_1,\dots,\alpha_n$) t.c.

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0)+\alpha\cdot h + o(\|h\|)} \quad \text{per } h\to 0$$

$x_0\in\mathbb{R}^n$ $\quad h\in\mathbb{R}^n$ $\quad (h,k)$ $\quad \alpha\in\mathbb{R}^n$ $\quad h\in\mathbb{R}^n$

prodotto scalare

norma del vettore h: $\sqrt{h^2+k^2} \quad (h,k)$

limite in n variabili

$$\boxed{\text{1D} \quad f(x_0+h) = f(x_0)+\alpha\cdot h + o(h) \text{ per } h\to 0}$$

$x_0\in\mathbb{R}$

$h\in\mathbb{R}$

prodotto in $\mathbb{R}$ $\qquad \in\mathbb{R}$ $\qquad$ limite a 1 var.

$\exists\, \alpha\in\mathbb{R}^n$

$\to f(x_0+h) = f(x_0)+\alpha\cdot h + o(\|h\|)$ per $h\to 0$

Teorema

Supponiamo che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
Allora valgono le seguenti proprietà

1) f è continua in x_0

2) Esistono le derivate parziali di f in x_0 e sono le componenti del vettore α

$$\alpha = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) = \nabla f(x_0)$$

f diff. in x_0 $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^n$ t.c. ......$)$ $\Longrightarrow$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_k}$ $k = 1, \dots, n$ e $\boxed{\alpha = \nabla f(x_0)}$

3) Esistono tutte le derivate direzionali di f in x_0 e sono date da

$\forall v \in \mathbb{R}^n$ $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ e

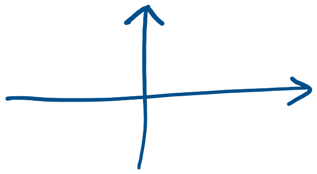
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \underbrace{\alpha}_{\nabla f(x_0)} \cdot v$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v}$$

N.B. Non vale il viceversa!

Può succedere che in x_0 esistano tutte le derivate parziali ma la funzione non è nemmeno continua in x_0 (quindi non differenz.)

$$\exists \text{ derivate parziali } \not\Rightarrow \text{ differenziabile}$$



esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{se } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Verificamo che nel punto $(x_0,y_0)=(0,0)$ esistono direzionali e sono nulle, ma f non è nemmeno continua

fisso $\underline{v=(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2}$ $\qquad (x_0,y_0)=(0,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\cancel{x_0}+t\alpha, \cancel{y_0}+t\beta) - \cancel{f(x_0,y_0)}}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{t^2\alpha^2 \cdot t\beta}{t^4\alpha^4 + t^2\beta^2}\right)^2 = \lim_{t\to 0} t\left(\frac{\alpha^2\beta}{t^2\alpha^2+\beta^2}\right)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \underline{0}$$

f non è neppure continua

↳ basta muoversi lungo le parabole (t, t^2)

$$x = t \qquad y = t^2$$

$$\lim_{t \to 0} f(t, t^2) = \frac{1}{4} \neq f(0,0)$$

Dimostrazione $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

3) Se f è differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora esistono tutte le deriv. direzionali di f in x_0

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \alpha \cdot v}$$

$\langle \alpha, v \rangle$

IPOTESI: f è differenziabile in x_0

$\Downarrow$

$\exists$ un vettore $\alpha \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + o(|h|)}$$

$h \in \mathbb{R}^n$ $\qquad$ prodotto scalare $\qquad$ per $h \to 0$

Fissiamo una direzione $v \in \mathbb{R}^n$ $(v \neq 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \underset{\text{per def.}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

$$\underset{\text{ipotesi di differenziabile}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0) + \alpha \cdot (t v) + o(|tv|) - f(x_0)}{t}$$

$t \in \mathbb{R}$, h

$h = t \cdot v$

$v \in \mathbb{R}^n$ $(t \cdot v) \in \mathbb{R}^n$

$t \in \mathbb{R}$

$\lim t \to 0 \to h \to 0$ in $\mathbb{R}^n$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + t(\alpha \cdot v) + o(|tv|) - \cancel{f(x_0)}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}(\alpha \cdot v)}{\cancel{t}} + \frac{o(|tv|)}{t}$$

$$= (\alpha \cdot v) + \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{o(t|v|)}{t|v|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{|v|}_{\neq 0 \text{ fissata}}$$

$(t > 0)$

$|tv| = t|v|$

$$= (\alpha \cdot v) + 0 = (\alpha \cdot v)$$

Usando la differenziabilità di f in x_0 ho ottenuto

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \alpha \cdot v}$$

OSS Le derivate parziali sono casi particolari di derivate direzionali; corrispondono alla scelta

$$v = e_k \quad \left(\begin{array}{l}\text{vettori}\\ \text{della}\\ \text{base canonica}\end{array}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_k}(x_0)$$

derivata parziale di f rispetto ad x_k

La dimostrazione appena vista ci mostra anche l'esistenza delle derivate parziali (punto 2) del teorema) e la formula

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)} = \frac{\partial f}{\partial e_k}(x_0) = \alpha \cdot \underbrace{e_k}_{\substack{k\text{-esimo}\\ \text{vettore della}\\ \text{base canonica di } \mathbb{R}^n}} = \boxed{\alpha_k}$$

$$\to (0, 0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow\\ k}}{1}, 0, \ldots 0)$$

$\alpha_k \to$ k-esima componente di α

$\to$ α vettore nella formula di differenziabilità di f con

$$\alpha_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} \Longrightarrow \alpha = \nabla f(x_0)$$

Se f è differenziabile in x_0, possiamo scrivere

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \boxed{\nabla f(x_0)}\cdot h + o(|h|) \quad \text{per } h \to 0}$$

Inoltre le derivate direzionali sono date dalla formula

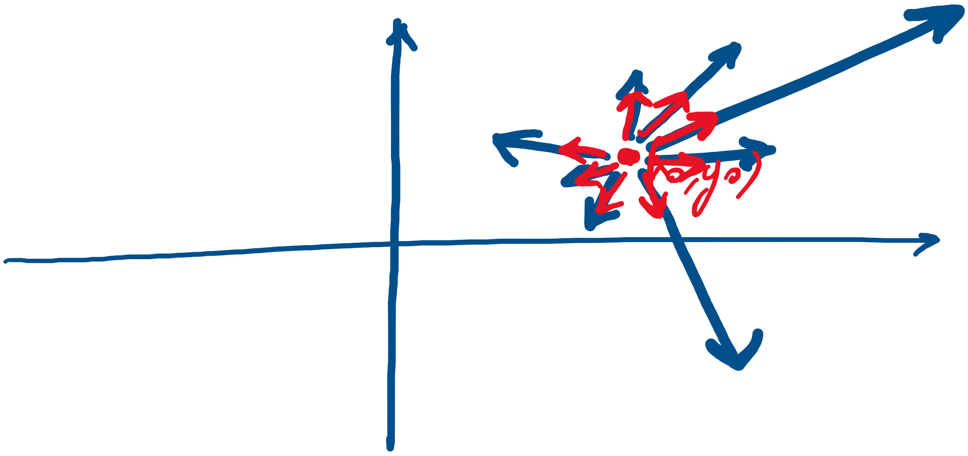
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \boxed{\nabla f(x_0)}\cdot v}$$

OSS Le formule valgono per qualsiasi direzione v.

Nel definire le derivate direzionali possiamo limitarci alle direzioni v con

$$|v| = 1 \qquad (\text{norma})$$

perché in questo modo descrivo tutte le possibili rette



Qual è il significato geometrico del gradiente?

Domanda: In quale direzione la derivata direzionale è max/min.

algebra lineare

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)} = \nabla f(x_0)\cdot v = \underbrace{|\nabla f(x_0)|}_{\text{non dipende da } v} \cdot \underbrace{|v|}_{=1} \cdot \underbrace{\cos\theta}_{\text{angolo compreso tra } \nabla f \text{ e } v}$$

$$\max_{\substack{v \\ |v|=1}} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \Rightarrow$$ lo realizzo quando massimizzo $\cos\theta$

$\Updownarrow$

$\cos\theta = 1$

$\Updownarrow$

$\theta = 0$

$\Updownarrow$

l'angolo compreso tra ∇f e v è zero

$\Updownarrow$

Scelgo come direzione quella del gradiente stesso

$$v \parallel \nabla f$$

$$\max_{|v|=1} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \text{ `` } = \frac{\partial f}{\partial(\nabla f(x_0))}(x_0) \text{ ''}$$

- Se voglio derivata direzionale massima devo scegliere v = direzione del gradiente

$$\boxed{v \parallel \nabla f(x_0) \Longrightarrow \text{max derivata direzionale in } x_0}$$

- Per minimizzare $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \Longleftrightarrow$

$\cos\theta = -1 \Longleftrightarrow \theta = \pi$

$\Longleftrightarrow v \parallel -\nabla f$

$\Longleftrightarrow v$ con direzione opposta a quella del gradiente

$$\boxed{v \parallel -\nabla f(x_0) \Longrightarrow \text{minima derivata direzionale in } x_0}$$

• se $\theta = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0$

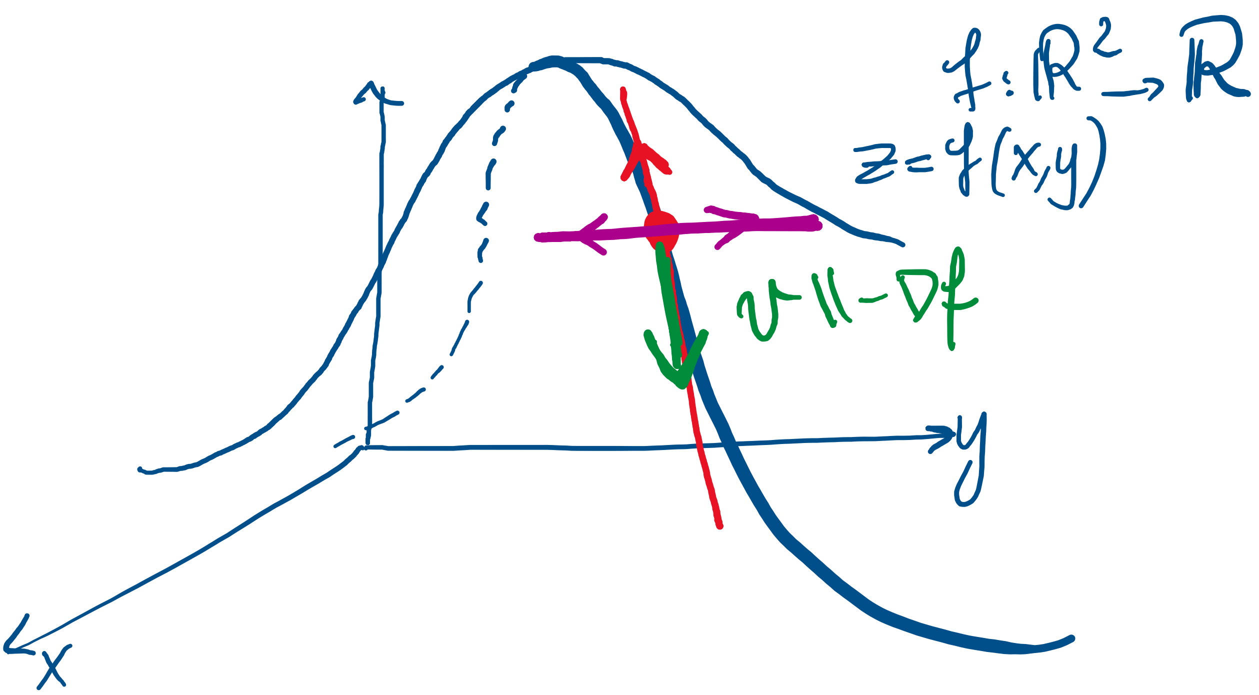
$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$$

se $\boxed{v \perp \nabla f(x_0) \Rightarrow \text{der. direzionale è nulla}}$

Significato geometrico del gradiente

Il gradiente rappresenta la direzione di massima pendenza della funzione, cioè la direzione in cui muoversi per salire in più in fretta possibile



Analisi prima

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + o(h) \quad \text{per } h\to 0$$

$x_0+h = x \to x_0 \quad \to \quad h = x - x_0$

$$f(x) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)} + o(x-x_0)$$

per $x \to x_0$

retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$

Analisi in più variabili

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k}_{\nabla f(x_0,y_0)\,\bullet\,(h,k)} + o(\ldots)$$

$h, k \in \mathbb{R}$

$x_0+h = x \to x_0 \qquad h = x - x_0$

$y_0+k = y \to y_0 \qquad k = y - y_0$

$$f(x,y) = \boxed{f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)} + o(\text{- - - -})$$

per $x\to x_0$, $y \to y_0$

$$y = \boxed{}$$

piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$