# ESERCITAZIONE 25/03

## Esercizio 5 : $f(x,y) = x^3 + 2xy - 2y^2$

punti stazionari : $\nabla f = (0,0)$

risolviamo : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y + 0 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2x - 4y = 0 \Rightarrow x = 2y \end{cases}$

$3 \cdot 4y^2 + 2y = 0 \qquad 2y(6y+1) = 0$

$y = 0 \quad o \quad y = -\frac{1}{6}$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$x = 0 \qquad\qquad x = -\frac{1}{3}$

2 punti stazionari; $(0,0)$ , $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$.

---

## Esercizio 6 : $f(x,y) = e^{-x}(y^3 - 2xy)$

Stesso metodo: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x}(y^3 - 2xy) + e^{-x}(-2y) = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{-x}\underbrace{(3y^2 - 2x)}_{= 0} = 0 & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}y^2$

① $-e^{-x}(y^3-2xy+2y)=0$

$\Rightarrow y^3-2xy+2y=0 \qquad (x=\frac{3}{2}y^2)$

$\Rightarrow y^3-\cancel{2}\frac{3}{\cancel{2}}y^2y+2y=0$

$\Rightarrow -2y^3+2y=0 \qquad 2y(-y^2+1)=0$

$y=0, \quad y=\pm 1$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$x=0 \qquad x=\frac{3}{2}\cdot(\pm 1)^2=\frac{3}{2}$

3 punti stazionari, $(0,0)$, $(\frac{3}{2},1)$, $(\frac{3}{2},-1)$

---

8. In quanti punti il gradiente di

$$f(x,y)=3x^2+2(y-1)^2$$

è parallelo al vettore $(1,1)$?

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(6x,\ 4(y-1)\cdot 1\right)$$

Un vettore $(a,b)$ è parallelo a $(1,1)$ esattamente quando $a=b\neq 0$.

Quindi $\nabla f$ è parallelo a $(1,1)$ quando

$$\underbrace{6x = 4(y-1)}\quad (\neq 0)$$

descrive una retta (privata di un punto)

in $\mathbb{R}^2$ $\rightsquigarrow$ infiniti punti.

"Sistematicamente": impongo che

$$\nabla f = \lambda \cdot (1,1) \quad \text{per qualche } \lambda \neq 0.$$

$$(6x, 4(y-1)) = (\lambda, \lambda) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 6x \\ \lambda = 4(y-1) \end{cases} \qquad \lambda \neq 0$$

$$\boxed{\begin{gathered} 6x = 4(y-1) \\ (x \neq 0,\ y \neq 1) \end{gathered}}$$

---

9. Minimo di $f(x,y) = \sin\left(\arctan \frac{y}{x}\right)$

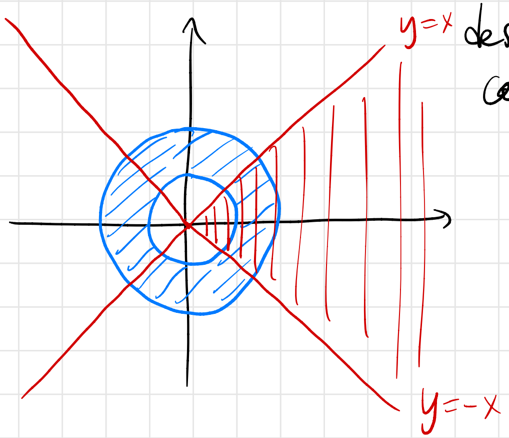
su $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \text{ e } |y| \leq x\}$

(bisognerebbe anche imporre che $x \neq 0$, ma questo è sicuramente verificato in $\Omega$, perché se $(x,y) \in \Omega$ e $x=0$, allora anche $y=0$

(perché in $\Omega$ ho $|y| \leq x$)

ma allora non è vero che $x^2+y^2 \geq 1$.)

Disegniamo $\Omega$: $1 \le x^2+y^2 \le 4$ $\circledast$




descrivono la corona circolare compresa tra le circ. centrate in $(0,0)$ di raggio 1 e 2.

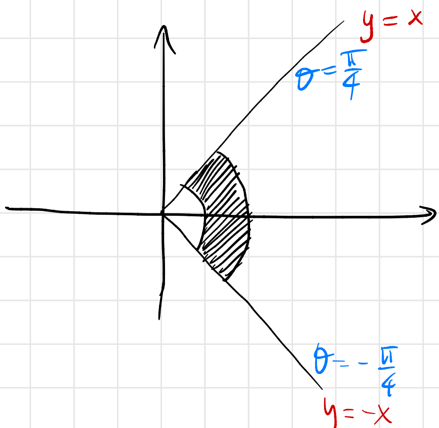
$|y| \le x \iff -x \le y \le x$ $\circledast$

$\Big( \Downarrow$

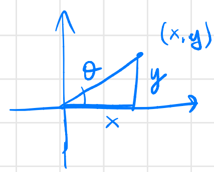
$-x \le x$

$\Downarrow$

$0 \le 2x \Rightarrow x \ge 0 \Big)$




$f(x,y) = \sin\left(\arctan \dfrac{y}{x}\right)$.




$\dfrac{y}{x} = \tan\theta$

se $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$,

allora $\arctan(\tan\theta) = \theta$

se $(x,y) \in \Omega$, (quindi siamo nel I o IV quadrante)

abbiamo $\sin\left(\arctan \dfrac{y}{x}\right) = \sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Si può lavorare con questa espressione, oppure pensare direttamente a minimizzare $\sin\theta$ nei punti di $\Omega$.

$\sin\theta$, per $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, e' minimo quando

$\theta = -\frac{\pi}{4}$, e vale $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Questo è quindi il minimo di $f(x,y)$ su $\Omega$.

(i punti di minimo sono quelli sul segmento "inferiore" di $\Omega$, e sono infiniti).

---

Cercando punti stazionari di $f(x,y) = \sin\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$,

dovrei intanto imporre che $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\arctan\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

si annulla se $y = 0$ oppure $\arctan\frac{y}{x} = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

non succede in $\Omega$

$y=0$ da i punti della forma $(x,0)$ in $\Omega$ (cioe' $1 \leq x \leq 2$),

che però non sono di massimo o minimo:

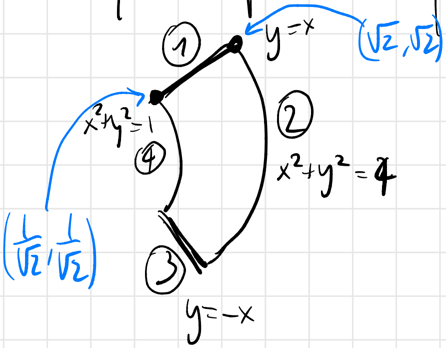
infatti $f(x,0) = \sin\left(\arctan\frac{0}{x}\right) = \sin(0) = 0$,

e in $\Omega$ ci sono sia punti in cui la funzione e' $>0$, sia punti in cui e' $<0$.

NOTA: ho solo imposto che $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0$, quindi non è detto che tutti i punti della forma $(x,0)$ siano stazionari, ma sicuramente tutti i punti stazionari in $\Omega$ sono di questa forma, e abbiamo visto che questi non possono essere né massimi né minimi.

Segue che massimo e minimo vengono necessariamente assunti sul bordo di $\Omega$.

A questo punto si può parametrizzare il bordo di $\Omega$:




1 $(t,t)$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le \sqrt{2}$

$f(x,y)$ in questi punti:

$$f(t,t) = \sin\left(\arctan\left(\frac{\cancel{t}}{\cancel{t}}\right)\right) \qquad t \neq 0$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

sul segmento 1, $\boxed{\begin{array}{l} max = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ min = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}}$

(con ③ viene una cosa analoga con $-\frac{\sqrt{2}}{2}$)

② si può parametrizzare come $(2\cos t, 2\sin t)$

con $-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$

$f(x,y)$ in questi punti

$$f(2\cos t, 2\sin t) = \sin\left(\arctan\left(\underbrace{\frac{\cancel{2}\sin t}{\cancel{2}\cos t}}_{\tan t}\right)\right)$$

$\arctan(\tan t) = t \qquad -\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$

$= \sin(t) \qquad -\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$

$\boxed{\begin{array}{l} \max = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \min = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}}$ $\begin{array}{l} \text{in } t = \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ \text{in } t = -\frac{\pi}{4} \rightsquigarrow (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \end{array}$

e analogamente si fa per l'arco ④.

(Si poteva parametrizzare dicendo $x^2+y^2=4$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt{4-y^2}$

Sì perché in $\Omega$ la $x$ è $>0$, quindi non devo preoccuparmi del "$\pm$".

Guardo i punti della forma $(\sqrt{4-y^2}, y)$

con $-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$.

$f(x,y)$ in questi punti $= f(\sqrt{4-y^2}, y) =$

$$= \sin\left(\arctan \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}\right).$$

Si può studiare coi soliti metodi per 1 variabile.

---

10. Trovare il massimo di $f(x,y) = e^y$

su $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 9, (x+1)^2 + y^2 \leq 9\}$.

Chiaramente, il massimo di $e^y$ si ottiene quando la $y$ è massima. Quindi basta trovare i punti di $\Omega$ in cui la $y$ è più grande possibile.

Disegniamo $\Omega$:

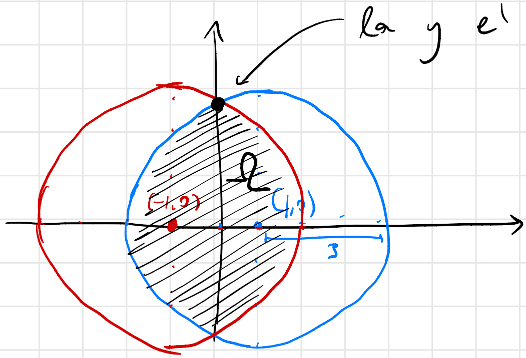
$(x-1)^2 + y^2 =$ quadrato della distanza di $(x,y)$ da $(1,0)$

$(x+1)^2 + y^2 =$ " " " " $(-1,0)$

$(x-1)^2 + y^2 \leq 9$ è il disco centrato in $(1,0)$ di raggio 3

$(x+1)^2 + y^2 \leq 9$ " " " " in $(-1,0)$ di raggio 3.

la $y$ e' massima qui: (in $\Omega$)




Intersechiamo le due circonf:

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2=9 & (1) \\ (x+1)^2+y^2=9 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$ : $(x-1)^2-(x+1)^2=0$

$\cancel{x^2}+\cancel{1}-2x-\cancel{x^2}-\cancel{1}-2x=0 \rightsquigarrow x=0$

$y^2=9-1 \rightsquigarrow y=\pm 2\sqrt{2}$

$\rightsquigarrow$ il massimo di $y$ in $\Omega$ e' $2\sqrt{2}$

e il massimo di $f(x,y)=e^y$ e' $e^{2\sqrt{2}}$

---

7. $f(x,y)=(x-1)^2+y^2$ su $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 9\}$

Sistematicamente, calcoliamo pti stazionari:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2(x-1)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix} \quad (1,0)$$

sta in $\Omega$: $1^2+0^2\leq 9$

$f(1,0)=(1-1)^2+0^2=0$

(quindi visto che $f(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y$, $(1,0)$ è necessariamente il minimo assoluto.)

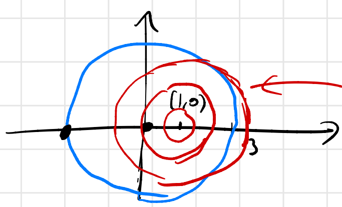
Essendo che l'unico punto stazionario interno è il minimo assoluto, e visto che la funzione è $> 0 = f(1,0)$ in qualche punto di $\Omega$ (e non essendoci punti singolari), possiamo concludere che il massimo (esiste per th. di W) viene assunto sul bordo di $\Omega$.

Geometricamente, $\Omega$ è il disco di centro $(0,0)$ e raggio 3.

$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ = quadrato della distanza di $(x,y)$ da $(1,0)$.

Palesemente, questa quantità è minima quando $(x,y) = (1,0)$ (e vale 0), ed è massima quando siamo il più lontano possibile da $(1,0)$.

Il massimo sarà in $(-3,0)$



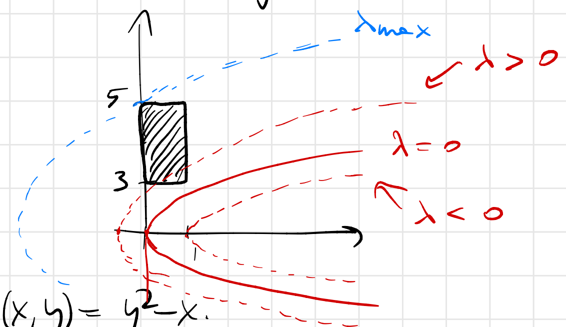

curve di livello di $f$.

1. $f(x,y) = \sqrt{\log(y^2 - x)}$ su $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 3 \le y \le 5 \}$

Visto che $\sqrt{t}$ e $\log(t)$ sono funzioni strettamente crescenti di $t$,

$f(x,y)$ sarà massima quando $y^2 - x$ è massima.

$\Omega$ è il rettangolo




Si può provare con le curve di livello di $g(x,y) = y^2 - x$.

$$g(x,y) = \lambda \iff y^2 - x = \lambda \iff x = y^2 - \lambda$$

parabola con asse orizz.

Qual è il valore massimo di $\lambda$ per cui la parabola $x = y^2 - \lambda$ interseca $\Omega$.

È abbastanza chiaro che il $\lambda$ massimo si avrà quando la parabola passa per $(0,5)$.

$$\Rightarrow 0 = 25 - \lambda \Rightarrow \lambda = 25.$$

Quindi il massimo di $f(x,y)$ è

$$f(0,5) = \sqrt{\log(\underset{\substack{\shortparallel\\ 5^2}}{25})} = \sqrt{2\log(5)}.$$

---

2. $f(x,y) = (2y-x)\log(x-2y)$ punti stazionari?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1\cdot\log(x-2y) + \cancel{(2y-x)}\cdot\frac{1}{\cancel{x-2y}}\cdot 1$$

$$= -\log(x-2y) - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\cdot\log(x-2y) + \cancel{(2y-x)}\cdot\frac{1}{\cancel{x-2y}}\cdot(-2)$$

$$= 2\log(x-2y) + 2 = 2(\log(x-2y)+1)$$

Imponendo $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}$ trovo

$$\log(x-2y) = -1$$

$$\Rightarrow x-2y = e^{-1} \quad \text{retta.}$$