Studio locale nell'intorno di un punto stazionario

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
t.c. $\quad \nabla f(x_0, y_0) = 0 \quad (\Leftrightarrow (x_0, y_0)$ pto stazionario$)$

1) Se $Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ ← le derivate parziali seconde

$f_{xy} = f_{yx}$

Hf è simmetrica se f abbastanza regolare (ai sensi del teorema di inversione di derivazione)

è definita positiva allora (x_0, y_0) è p.to di minimo locale

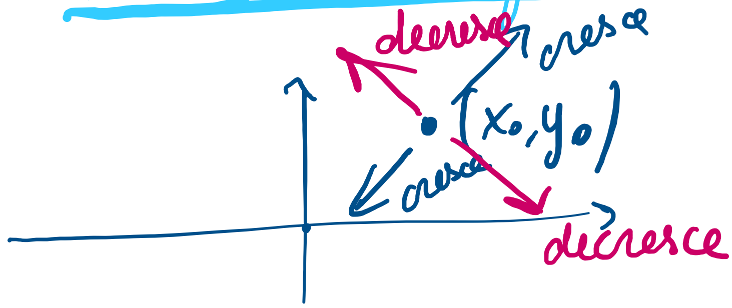
(Hf definita positiva $\Leftrightarrow$ tutti i suoi autovalori sono positivi
$(+ \; +)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad Hf \in M(2\times 2)$
$\to 2$ autovalori)

2) Se Hf è definita negativa
($\Leftrightarrow$ entrambi gli autovalori sono negativi
$\Leftrightarrow (- \; -)$)

allora (x_0, y_0) è un punto di max locale

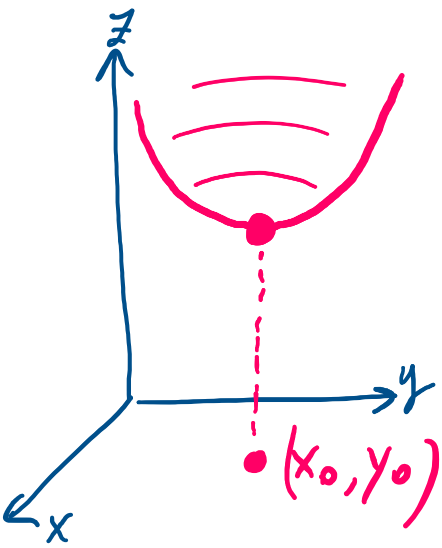
3) Se Hf è **indefinita** ($\Leftrightarrow$ esistono due autovalori discordi $\Leftrightarrow$ $(+-)$) allora **(x_0,y_0) è un punto di sella**

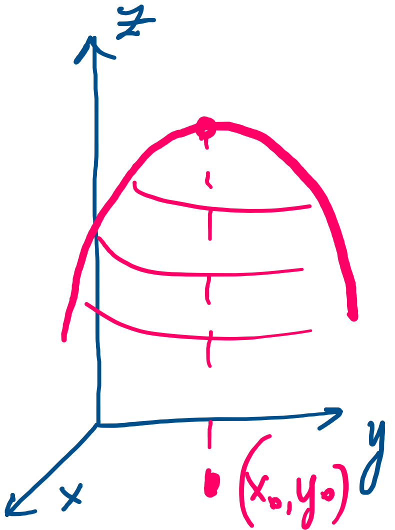


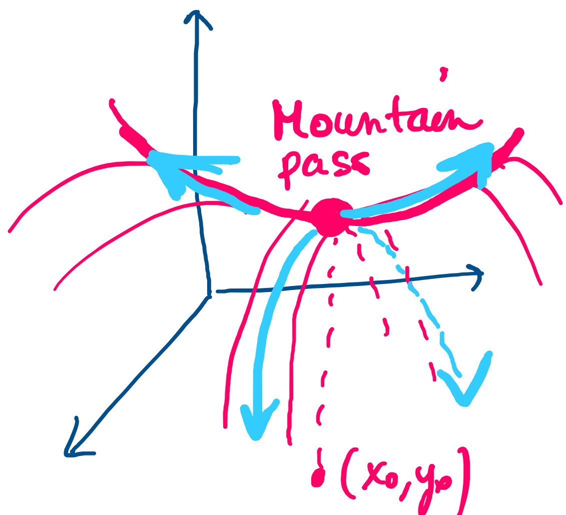
(non è né max né min. locale)

4) Se Hf è **degenere** ($\det Hf = 0$ $\Leftrightarrow$ 0 è tra gli autovalori di Hf) allora non possiamo concludere nulla

$(++)$	$(--)$	$(+-)$	$(0\ \mp)$
MINIMO	MAX	P.TO di SELLA	?







Osservazione

La matrice hessiana fornisce informazioni **locali** cioè ci permette di concludere l'esistenza di max/minimi locali, ma

↓

vicino al p.to (x_0, y_0)

non ci dà informazioni **globali**

Analisi 1d (finora)

- Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ x_0 è un p.to di minimo locale, allora

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \quad e \quad f''(x_0) \geq 0}$$

(supponendo che in x_0 $\exists f', f''$)

- se x_0 è un p.to di massimo locale, allora

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \quad e \quad f''(x_0) \leq 0}$$

Analisi in più variabili

Se $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è p.to di massimo minimo locale, allora

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad Hf(x_0, y_0) \geq 0$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \qquad Hf(x_0, y_0) \leq 0$$

matrice semi-definita positiva (gli autovalori sono non negativi)

Riassumendo

$\boxed{\nabla f = 0 \text{ e } Hf > 0} \Longrightarrow$ min. locale

min locale $\Longrightarrow \boxed{\nabla f = 0 \text{ e } Hf \geq 0}$

solo necessaria

Ad esempio se la matrice hessiana ha autovalori $0, 3$ $(Hf \geq 0)$ posso dire solamente che non è di max ($\Rightarrow Hf \leq 0$).

Esempi di studi locali

1) $f(x,y) = x^2 + y^4 \qquad (x_0, y_0) = (0,0)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = \left(2x, \ 4y^3 \right)$$

$f_x = \boxed{2x}$

$f_y = \boxed{4y^3}$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$$

$\Rightarrow (0,0)$ è punto stazionario $\rightarrow$ Per studiare localmente (vicino a $(0,0)$) la funzione f ci calcoliamo la matrice hessiana

$(\nabla f(0,0) = 0)$

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & \boxed{f_{xy}} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix} \leftarrow$$ matrice diagonale

$\lambda_1 = 2$ $\quad$ $\lambda_2 = 0$

$+$ $\quad$ nullo $\to$ Hf semidefinita positiva

$$\boxed{Hf \geq 0}$$

$>$ $\Rightarrow$ minimo

$\to$ Se $Hf(0,0)$ è semidefinita positiva allora $(0,0)$ non è un p.to di max locale.

Se $(0,0)$ fosse un p.to di max locale allora avremmo $Hf(0,0) \leq 0$

$$f(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0$$

$$f(0,0) = 0$$

$\to$ Si vede "a mano" che $(0,0)$ è un punto di MINIMO GLOBALE

$$f(x,y) > 0 = f(0,0) \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

2) $f(x,y) = x^2 - y^4$

$$\nabla f(x,y) = \left(2x, -4y^3 \right)$$

$(0,0)$ è punto stazionario

$$\nabla f(0,0) = 0$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

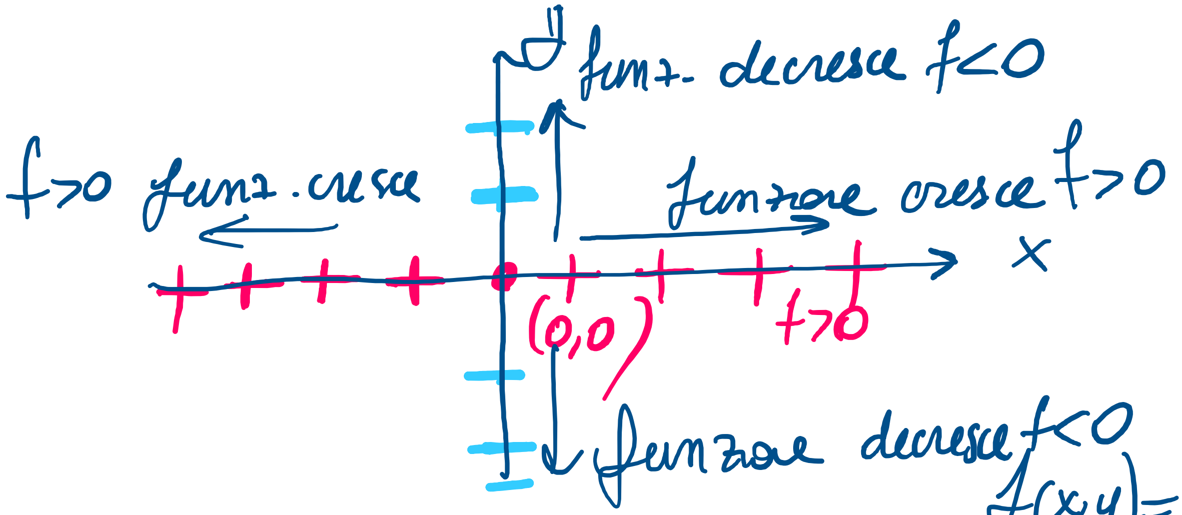
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 0$$

Hf è semidefinita positiva in $(0,0)$

$\Longrightarrow$ $(0,0)$ non è max. locale

In questo caso $(0,0)$ non è né max né minimo



$f(x,y) = x^2 - y^4$

asse $x \to y=0 \to f(x,0) = x^2 \geq 0$

asse $y \to x=0 \to f(0,y) = -y^4 \leq 0$

$f(0,0) = 0$

Vicino a $(0,0)$ $\exists$ punti in cui $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$ $\left(f(x,0) \ \forall x \right)$

e punti in cui $\underset{f(0,0)}{f(x,y) \leq 0}$ $\left((0,y) \ \forall y \right)$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ non è max
non è min

3) $f(x,y) = x^3 + x^2y^2 + y^4$

$f_x = \underbrace{3x^2 + 2xy^2}$ $\leftarrow$

$f_y = 2x^2y + 4y^3$ $\leftarrow$ $\leftarrow$

$\nabla f = (f_x, f_y)$

$\nabla f(0,0) = 0$ $\rightarrow$ $(0,0)$ è p.to stazionario

$$Hf = \begin{pmatrix} 6x + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ Hf è degenere

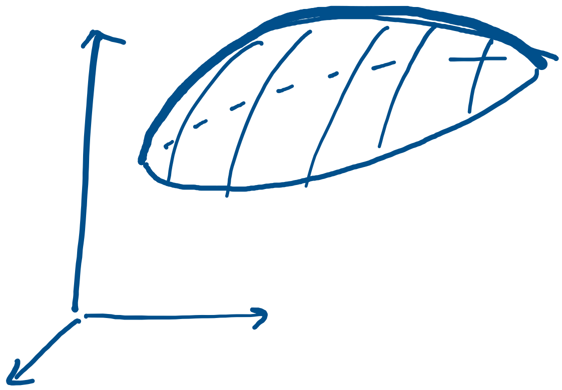
$\downarrow$

?

Non sappiamo concludere

Superfici

superfici in $\mathbb{R}^3$ $\longrightarrow$ cartesiano
$\longrightarrow$ implicito
$\longrightarrow$ parametrico



3 modi possibili per descrivere una superficie

Superficie cartesiana

$A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : \underset{\mathbb{R}^2}{\overset{\cap}{A}} \to \mathbb{R}$,

superficie = grafico di una funzione

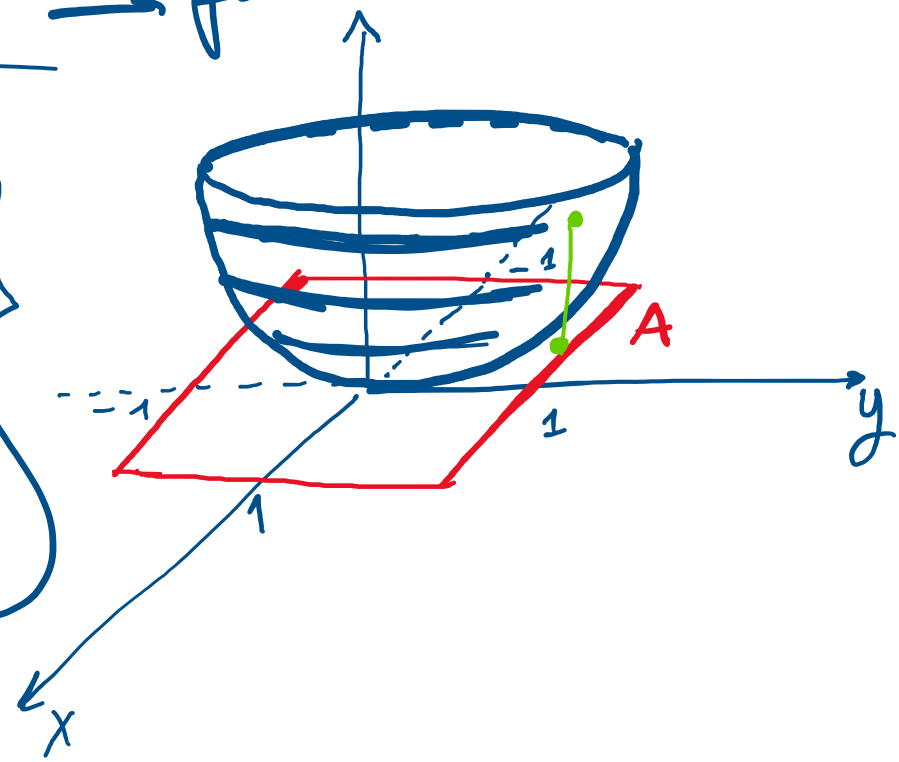
$$\boxed{S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underset{(x,y) \in A}{z = f(x,y)} \right\}}$$

esempio

$A = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2 =$ piano xy

$f(x,y) = \underline{x^2+y^2} \longrightarrow$ paraboloide

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \\ z = f(x,y) \\ (x,y) \in A \end{array} \right\}$$



$S =$ parte di paraboloide che si proietta sul quadrato A

Superficie implicita

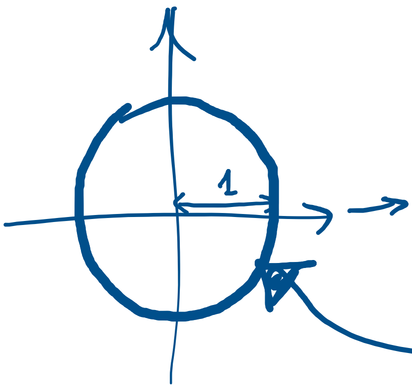
S superficie $\subset \mathbb{R}^3$

S è il <u>luogo di zeri</u> di una funzione di tre variabili $\phi(x,y,z)$

$$\boxed{S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underline{\phi(x,y,z)} = 0 \}}$$

Si dice anche che $\phi(x,y,z)=0$ è "l'equazione della superficie".

Superficie "implicita" → non viene ricavata una variabile rispetto alle altre



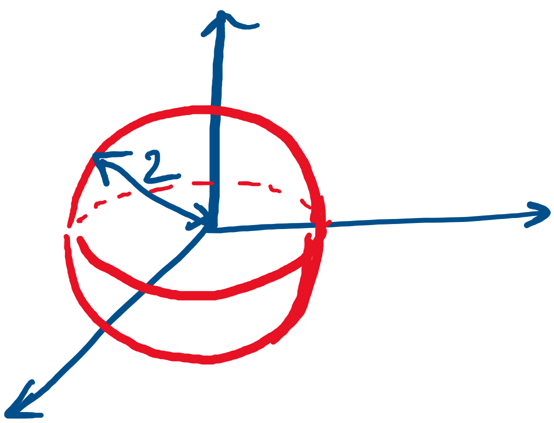
$$x^2+y^2=1 \rightarrow \boxed{x^2+y^2-1=0}$$

esempi

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \underbrace{x^2+y^2+z^2-4}_{\phi(x,y,z)}=0\right\}$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \underbrace{x^2+y^2+z^2=4}_{\text{forma implicita}}\right\}$$

SFERA $\subset\mathbb{R}^3$



Superficie parametrica

Consideriamo $A \subseteq \underline{\mathbb{R}^2}$ dato,

insieme dove variano i parametri

2 parametri

consideriamo tre funzioni date

$$x(u,v) : A \to \mathbb{R}$$
$$y(u,v) : A \to \mathbb{R} \quad \text{con } (u,v) \in A$$
$$z(u,v) : A \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{S = \left\{ (\underline{x},\underline{y},z) \in \mathbb{R}^3 \quad (\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \text{ al variare di } (u,v) \in A \right\}}$$

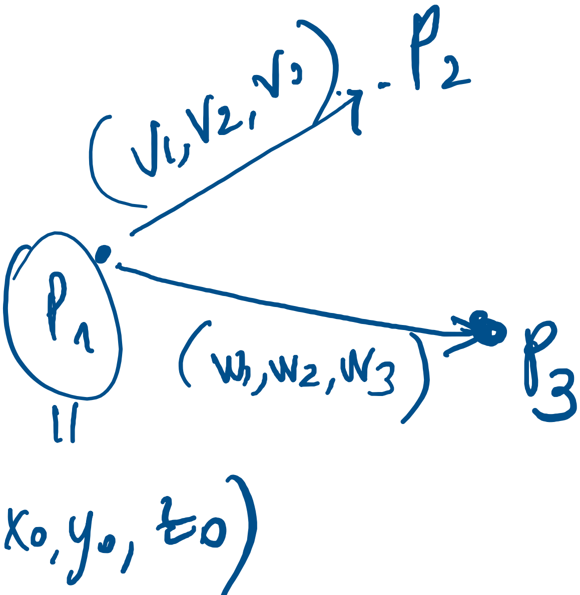
Esempio 1

Un piano in $\mathbb{R}^3$ ha equazione parametrica del tipo

$$\boxed{(x_0, y_0, z_0) + t\,\underbrace{(v_1, v_2, v_3) + s\,(w_1, w_2, w_3)}}$$

punto per cui passa il piano

vettori che generano il piano



$$\begin{pmatrix} x_0 + t v_1 + s w_1 \\ y_0 + t v_2 + s w_2 \\ z_0 + t v_3 + s w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \end{pmatrix}$$

dati

t e s sono i parametri

$u = t$

$v = s$ $\leftarrow$ $(t,s) \in \mathbb{R}^2$

Esempio 2

$$S = \left\{ \left(\underline{1+u^2}, \ \underline{u \cdot v}, \ \underline{u^2+v^2} \right) : \underline{u^2+v^2 \le 3} \right\}$$

$$\underline{(u,v)} \in \overline{B_{\sqrt{3}}(0)} \ : \ u^2+v^2 \le 3$$

Legame tra le diverse definizioni

Tutte le superfici cartesiane sono in realtà superfici parametriche

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = f(x,y), \ (x,y) \in A \right\}$$

sup. cartesiana

$$= \left\{ (u, v, f(u,v)) : (u,v) \in A \right\}$$

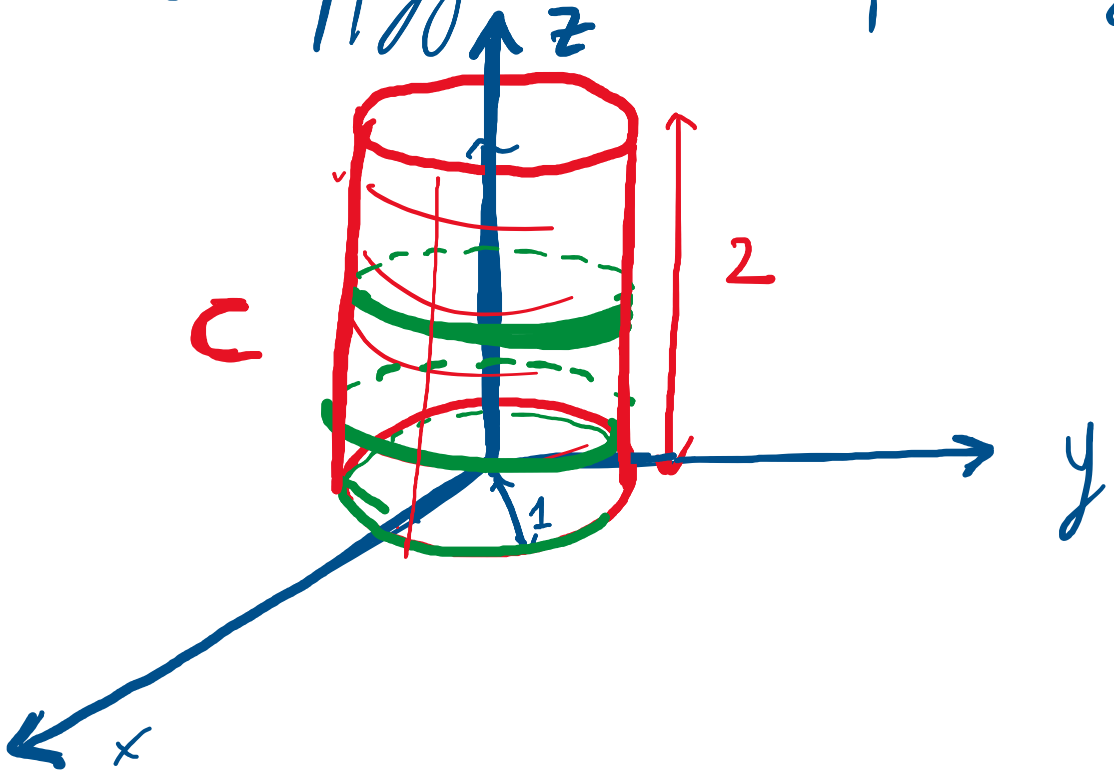
sup. parametrica

f (prime due)

x y

Esercizio

- Cilindro con asse lungo asse z
- raggio di base = 1
- altezza = 2
- Cilindro appoggiato sul piano xy



- sup. cartesiana → NO
- Sup. implicita

$$C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \Phi(x,y,z) = 0 \}$$

$$C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \boxed{x^2+y^2=1}, \boxed{0 \le z \le 2} \}$$

eq implicita

limitazione

sup. implicita

— sup. parametrica:

usiamo come parametri $\boxed{z}$ e il θ delle coordinate polari ($\rho \equiv 1 \rightarrow$ la circonferenza di base ha raggio 1)

$$C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

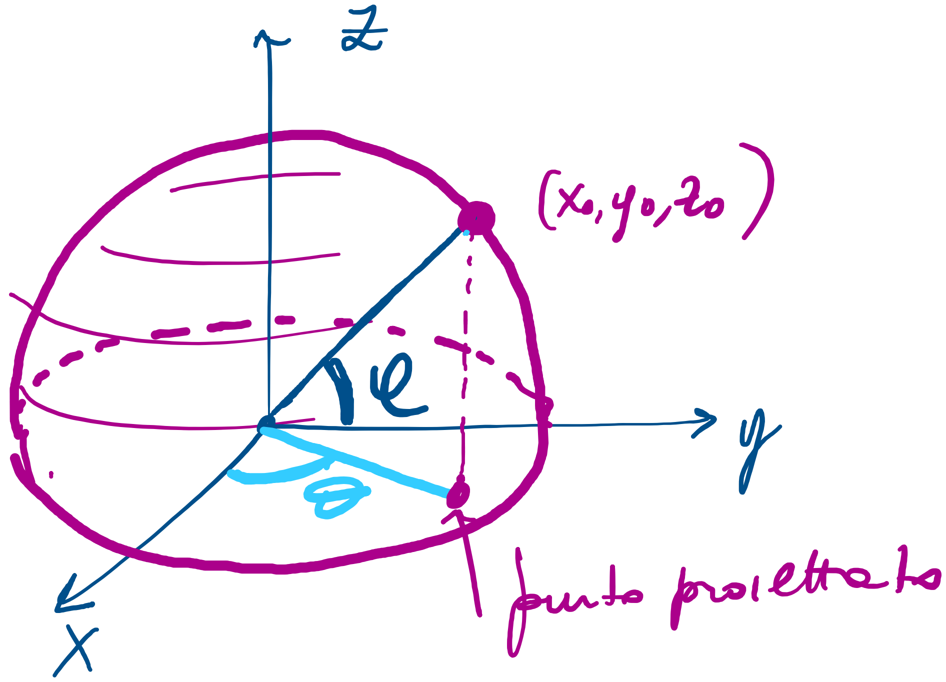
$\rho = 1$ $\rho = 1$

$$\underbrace{0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le z \le 2}_{\text{insieme dove variano parametri}} \}$$

$\theta, z \in [0,2\pi] \times [0,2]$

Esercizio 2

Semisfera di raggio 3



superficie parametrica

coordinate sferiche

$$S = \left\{ \left(3\cos\theta \cdot \cancel{\sin\varphi}\,\cos\varphi,\ 3\sin\theta\,\cancel{\sin\varphi}\,\cos\varphi,\ \underbrace{3\sin\varphi}_{z} \right) \right.$$

coordinate polari del punto proiettato sul piano xy

$$\left. 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

- Piano tangente ad una superficie
- Vettore normale ad una superficie

↳ vettore perpendicolare al piano tangente

Superficie cartesiana $\quad z = f(x,y)$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$$

↳ come scrivo il piano tangente nel punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

$$f(x_0+h, y_0+k) = \boxed{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot h + f_y(x_0,y_0)\cdot k} + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

eq. del piano tangente

se poniamo

$x_0 + h = x \qquad h = x - x_0$

$y_0 + k = y \qquad k = y - y_0$

sostituiamo e troviamo

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

Equazione del piano tangente

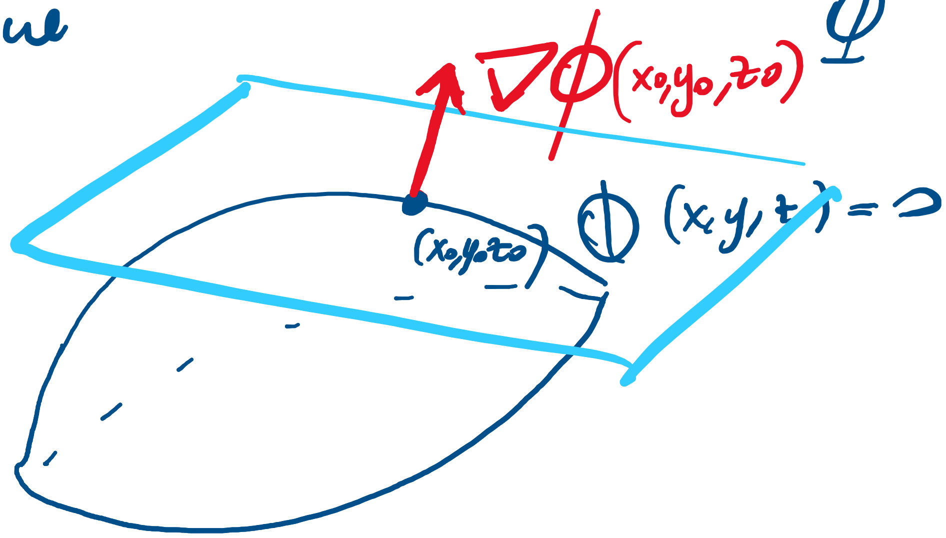
Superficie implicita

$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x,y,z) = 0 \}$$

Il luogo di zeri, cioè S, è una insieme di livello per ϕ $\Longrightarrow$ S è perpendicolare al gradiente di ϕ

superficie



Quindi il piano tangente ad S in un punto (x_0,y_0,z_0) è il piano che passa per (x_0,y_0,z_0) ed è $\perp$ $\nabla\phi(x_0,y_0,z_0)$

Di conseguenza il piano ha equazione: $(x,y,z) \in$ piano se

$$\langle \nabla\phi(x_0,y_0,z_0), (x,y,z) \rangle = d$$

dove d è una costante scelta in modo che piano passi per (x_0,y_0,z_0)

$$\phi_x(x_0,y_0,z_0)\cdot x + \phi_y(x_0,y_0,z_0)\cdot y + \phi_z(x_0,y_0,z_0)\cdot z =$$

$$\phi_x(x_0,y_0,z_0)\cdot x_0 + \phi_y(x_0,y_0,z_0) y_0 +$$

$$\phi_z(x_0,y_0,z_0)\cdot z_0 .$$