Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

# Analisi Matematica

15 aprile 2021

**Esercizio 1** Si consideri la funzione $f(x,y) = x^3+2xy-2y^2$. Trovare i punti di massimo e di minimo locale di $f$ in $\mathbb{R}^2$.
**Soluzione**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 4y.$$

$\nabla f = 0$ se e solo se $(x,y) = (0,0)$ oppure $(x,y) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$$

quindi la matrice Hessiana nei due punti stazionari è la seguente:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad Hf\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $\det(Hf(0,0)) = -4 < 0$ quindi la forma quadratica è indefinita e l'origine è punto di sella per $f$. Invece $\det\left(Hf(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})\right) = 4 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 < 0$ quindi la forma quadratica è definita negativa e il punto è di massimo relativo.

**Esercizio 2** Si consideri la funzione $f(x,y) = e^{-x}(y^3 - 2xy)$. Trovare i punti di massimo e di minimo locale di $f$ in $\mathbb{R}^2$.
**Soluzione**
$f$ è una funzione di classe $C^\infty$ definita su un insieme aperto, quindi i punti di massimo o minimo locale vanno cercati

dove il gradiente si annulla.

$$f_x = e^{-x}y(-y^2 + 2x - 2), \qquad f_y = e^{-x}(3y^2 - 2x)$$

$\nabla f = 0$ nei punti $P = (0,0)$, $Q = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $R = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$.
Calcoliamo ora le derivate seconde:

$$f_{xx} = ye^{-x}(y^2 - 2x + 4), \ f_{yx} = e^{-x}(-3y^2 + 2x - 2), \ f_{yy} = 6ye^{-x}.$$

La matrice Hessiana nel punto P risulta:

$$Hf(P) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

che rappresenta una forma quadratica indefinita, essendo $\det(Hf(P)) < 0$, quindi P è un punto di sella.

$$Hf(Q) = \begin{pmatrix} -2e^{-\frac{3}{2}} & -2e^{-\frac{3}{2}} \\ -2e^{-\frac{3}{2}} & -6e^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

che rappresenta una forma quadratica definita negativa, essendo $\det Hf(Q) > 0$ e $f_{xx}(Q) < 0$, quindi il punto Q è di massimo relativo. Osserviamo ora che $f(x,-y) = -f(x,y)$, quindi il punto R è di minimo relativo.

**Esercizio 3** Si consideri la funzione $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 2x - 2xy^2 - 2y^2 + y^4$. Trovare i punti di massimo e di minimo locale per $f$.
**Soluzione**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6x + 2 - 2y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -4xy - 4y + 4y^3.$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ 3x^2 + 6x + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y^2 - x - 1 = 0 \\ 3x^2 + 4x = 0 \end{cases}$$

quindi il gradiente si annulla nei seguenti punti:

$$A = \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), \; B = \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), \; C = (0,1), \; D = (0,-1).$$

Calcoliamo le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x - 4 + 12y^2.$$

Valutiamo la matrice Hessiana nei quattro punti stazionari:

$$Hf(A) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -4\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \qquad \det(Hf(A)) < 0$$

quindi $A$ è un punto di sella.

$$Hf(B) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \qquad \det(Hf(B)) < 0$$

quindi $B$ è un punto di sella.

$$Hf(C) = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \det(Hf(C)) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) > 0$$

quindi la forma quadratica Hessiana in $C$ è definita positiva e $C$ è un punto di minimo locale.

$$Hf(D) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \det(Hf(D)) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(D) > 0$$

quindi la forma quadratica Hessiana in $D$ è definita positiva e $D$ è un punto di minimo locale.

**Esercizio 4** Sia $f(x,y) = xy^2 - yx^2$. Trovare i punti di massimo e di minimo locali per $f$ in $\mathbb{R}^2$.
**Soluzione**

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è differenziabile, quindi nei punti di massimo e di minimo relativo si deve annullare il gradiente.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - x^2.$$

L'unico punto dove $\nabla f = 0$ è $(0,0)$. Valutiamo le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y - 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x.$$

Quindi la matrice Hessiana nell'origine risulta:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'analisi delle derivate seconde non ci fornisce quindi nessuna informazione. Osserviamo che $f(0,0) = 0$ e che $f(x,y) \leq 0$ se $0 \leq y \leq x$, mentre $f(x,y) \geq 0$ se $0 \leq x \leq y$. Ne segue che $(0,0)$ non è né punto di massimo né punto di minimo locale per $f$. La $f$ non ha quindi massimi o minimi locali.

**Esercizio 5** Data la funzione $f(x,y) = x^3 - x - 2xy^4 + y^8$ trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi e gli eventuali punti di sella (intesi come punti dove esistono una direzione rispetto alla quale il punto è di massimo e un'altra direzione rispetto alla quale il punto è di minimo relativo).

**Soluzione**

Osserviamo che $f(x,-y) = f(x,y)$ quindi la funzione è simmetrica rispetto all'asse $x$.
Le derivate parziali di $f$ sono: $f_x = 3x^2 - 1 - 2y^4$, $f_y = -8xy^3 + 8y^7$. Risolvendo il sistema di equazioni $\nabla f = 0$ si ottengono i punti stazionari $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $(1,1)$, $(1,-1)$.
Le derivate seconde sono: $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -8y^3$, $f_{yy} = -24xy^2 + 56y^6$. La matrice hessiana nel punto $(1,1)$ è $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 32 \end{pmatrix}$ che ha determinante positivo. Essendo $f_{xx}(1,1) > 0$ la matrice è definita positiva e il punto è di minimo locale. Lo stesso vale per il punto $(1,-1)$ (per simmetria).
Nel punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ risulta invece

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è semidefinita positiva. È necessaria un'analisi locale della funzione.
Consideriamo la restrizione $h(x) = f(x,0) = x^3 - x$. Risulta $h'(x) = 3x^2 - 1$ che è positiva per $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Quindi il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ è di minimo relativo per questa restrizione.
Consideriamo ora la restrizione $g(y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, y\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}y^4 + y^8$. Risulta $g'(y) = \frac{-8}{\sqrt{3}}y^3 + 8y^7$ che è positiva in un intorno sinistro di $y = 0$ e negativa in un intorno destro. Quindi il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ è di massimo relativo per questa restrizione. Ne segue che il punto è di sella per la funzione.
Risultato analogo per il punto $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right)$.

**Esercizio 6** Sia $g(x,y) = 11e^{x+y} - 5y + \frac{1}{x} + 5$. Trovare i punti di massimo, di minimo relativo o di sella per $g$.
**Soluzione**
La funzione è definita sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

L'insieme $D$ è aperto, quindi nei punti di massimo o di minimo locali il gradiente di $g$ si annulla.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 11e^{x+y} - \frac{1}{x^2}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 11e^{x+y} - 5$$

e il gradiente si annulla nei punti $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \log 5 - \log 11 - \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \log 5 - \log 11 + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.
Calcoliamo le derivate seconde di $g$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 11e^{x+y} + \frac{2}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 11e^{x+y}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 11e^{x+y}.$$

La matrice Hessiana in $P$ risulta: $Hg(P) = \begin{pmatrix} 5 + 10\sqrt{5} & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ che ha determinante positivo. Essendo $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(P) > 0$ la forma quadratica associata è definita positiva, quindi il punto $P$ è di minimo relativo.
La matrice Hessiana in $Q$ risulta: $Hg(Q) = \begin{pmatrix} 5 - 10\sqrt{5} & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ che ha determinante negativo. La forma quadratica associata è indefinita, quindi il punto $Q$ è di sella.