ESERCITAZIONE 15/04

Metodo per trovare massimi e minimi locali (e punti di sella)
di una $f: U \to \mathbb{R}$ ($U \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto)
differenziabile su U. (ad esempio $U = \mathbb{R}^2$)

(1) Ricerca dei punti stazionari : $\nabla f = 0$

(2) Calcolo della matrice Hessiana nei punti stazionari

se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è t.c. $\nabla f(x_0, y_0)$ e

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

se $H(x_0, y_0)$ è

- definitiva positiva (autovalori $+ +$) $\Rightarrow$ (x_0, y_0) è minimo locale
- definita negativa (autovalori $- -$) $\Rightarrow$ (x_0, y_0) è massimo locale
- indefinita (autovalori $+ -$) $\Rightarrow$ (x_0, y_0) è un punto di sella.
- degenere (autovalori 0 ?) $\Rightarrow$ non si sa

dire niente

(in questo caso si può cercare di capire "a occhio" se il punto è di massimo, minimo o sella, ad esempio restringendo la funzione a delle rette passanti per (x_0, y_0)).

<u>Oss</u>: in realtà non bisogna calcolare davvero gli autovalori.

Come si calcolano gli autovalori: $H(x_0, y_0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} f_{yx} & f_{yy} \end{array} \end{array}$

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix} = (a-t)(d-t) - bc =$$

$$= t^2 - \underbrace{(a+d)}_{tr(H(x_0,y_0))}t + \underbrace{ad-bc}_{\det(H(x_0,y_0))} = 0$$

se λ_1, λ_2 sono i due autovalori, abbiamo

$$p(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2) = t^2 - \underbrace{(\lambda_1+\lambda_2)}t + \underbrace{\lambda_1\lambda_2}$$

quindi $\lambda_1 \lambda_2 = \det(H(x_0, y_0))$

e $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(H(x_0, y_0))$

<u>Quindi</u>:

- se $\det(H(x_0, y_0)) < 0$, per forza gli autovalori sono $+ -$, quindi c'è un punto di sella.

- se $\det(H(x_0, y_0)) > 0$, si guarda $f_{xx}(x_0, y_0)$.

  se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \implies$ minimo locale

  se $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \implies$ massimo locale

(infatti: $\det(H(x_0, y_0)) > 0 \implies \lambda_1, \lambda_2$ sono $\neq 0$ e hanno lo stesso segno.

quindi sono entrambi > 0 esattamente quando la traccia lo è (e idem con negativi)

inoltre, visto che $f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$,

se $f_{xx} > 0$, per forza anche $f_{yy} > 0$

se $f_{xx} < 0$, " " " $f_{yy} < 0$

quindi $f_{xx} > 0 \iff \underline{f_{xx} + f_{yy}} > 0$ $= tr(H(x_0, y_0))$

$f_{xx} < 0 \iff f_{xx} + f_{yy} < 0$.)

- se $\det(H(x_0, y_0)) = 0 \implies H(x_0, y_0)$ è degenere, e il criterio non si applica.

(Nota: se la funzione ha dei punti singolari, questi possono essere massimi e/o minimi locali. Bisogna studiarlo "a occhio".. es: $f(x,y) = |x| + |y|$)

Esercizio 6 $\qquad g(x,y) = 11e^{x+y} - 5y + \frac{1}{x} + 5.$

Dominio di g è $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$

$g(x,y)$ è differenziabile su tutto D.

(1) punti stazionari

$$\nabla f = 0 \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 11e^{x+y} - \frac{1}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 11e^{x+y} - 5 = 0 \end{cases}$$

eliminando $11e^{x+y}$ trovo $-\frac{1}{x^2} = -5 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

sostituisco in $11e^{x+y} - 5 = 0$

$$e^{x+y} = \frac{5}{11} \qquad x+y = \log\frac{5}{11}$$

$$\Rightarrow \text{(A)} \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \log\frac{5}{11} - \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \qquad \text{(B)} \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \log\frac{5}{11} + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

(2) Hessiana : $f_{xx} = 11e^{x+y} + \frac{2}{x^3}$

$$f_{yy} = 11e^{x+y}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 11e^{x+y}$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 11e^{x+y} + \frac{2}{x^3} & 11e^{x+y} \\ 11e^{x+y} & 11e^{x+y} \end{pmatrix}$$

(Oss nei punti stazionari $11e^{x+y} = 5$)

in A $\begin{pmatrix} 5+5\sqrt{5}\cdot 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

in B $\begin{pmatrix} 5-5\sqrt{5}\cdot 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

- $\det(H(x,y))$ in A è $(5+10\sqrt{5})5 - 5\cdot 5$
  $= \cancel{25} + 50\sqrt{5} - \cancel{25} = 50\sqrt{5} > 0$

  $f_{xx} = 5+10\sqrt{5} > 0$

  $\Rightarrow$ Hessiano è def >0, e il punto è di minimo locale.

- $\det(H(x,y))$ in B è $(5-10\sqrt{5})5 - 5\cdot 5 = -50\sqrt{5} < 0$

  quindi $H(x,y)$ è indefinita, e c'è un pto di sella.

Esercizio 5 : $f(x,y) = x^3 - x - 2xy^4 + y^8$

Dominio: tutto $\mathbb{R}^2$, e f è differenziabile ovunque.

① Punti stazionari: $\nabla f = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 1 - 2y^4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -8xy^3 + 8y^7 = 0 \end{cases}$$

$y^3(8y^4 - 8x) = 0$

$y = 0$ oppure $8y^4 - 8x = 0$ cioè $y^4 = x$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$\boxed{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)}$

A, B

$$\begin{cases} y^4 = x \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y^4 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y^4 = -\frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{nessuna soluzione}$$

$\boxed{(1,-1), \quad (1,1)}$

C D

② Hessiana:

$f_{xx} = 6x \quad , f_{xy} = f_{yx} = -8y^3 , \quad f_{yy} = -24xy^2 + 56y^6$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -8y^3 \\ -8y^3 & -24xy^2 + 56y^6 \end{pmatrix}$$

in (A), (B), si ha $H = \begin{pmatrix} \pm \frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

quindi l'Hessiana è degenere e non possiamo concludere niente (ci pensiamo dopo).

in (C) $H = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 32 \end{pmatrix}$

$\det = 32 \cdot 6 - 64 = 192 - 64 > 0$

visto che $f_{xx} = 6 > 0$

$\Rightarrow$ la matrice è def. > 0 e c'è un min. loc.

in (D) $H = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 32 \end{pmatrix}$

$\det = 192 - 64 > 0$ e $f_{xx} = 6 > 0$

$\Rightarrow$ di nuovo minimo locale.

(Notando che $f(x,-y) = x^3 - x - 2x(-y)^4 + (-y)^8$
$$= x^3 - x - 2xy^4 + y^8$$
$$= f(x,y)$$
e una volta concluso che f ha un min loc. in $(1,1)$, si può concludere che c'è un minimo locale in $(1,-1)$ per simmetria)

Cerchiamo di capire cosa succede in $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$:

Prendiamo $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, e restringiamo la funzione a rette passanti per questo punto.

Proviamo con la retta $y=0$: la funzione diventa $g(x) = f(x,0) = x^3 - x$.

$g'(x) = 3x^2 - 1$ è $=0$ in $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$g''(x) = 6x$, $g''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$

$\Longrightarrow$ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è un minimo loc. per g.

(questa direzione corrisponde all'autovalore $\neq 0$ dell'Hessiana).

Prendiamo la retta verticale $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$g(y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, y\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} y^4 + y^8$$

$$g'(y) = -\frac{8}{\sqrt{3}} y^3 + 8y^7 = y^3 \left(8y^4 - \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$$

$g'(0) = 0$ (stavolta anche $g''(0) = 0 \ldots$)

vicino a 0, abbiamo
- y^3 ha lo stesso segno di y
- $\left(8y^4 - \frac{8}{\sqrt{3}}\right) < 0$

quindi $g'(y) > 0$ per $y < 0$ piccolo
< 0 per $y > 0$ piccolo

$+ + + + \overset{0}{|} - - -$ $\quad g'$

$\nearrow \cdot \searrow$ $\quad g$

quindi g ha max locale in $y = 0$.

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ è di max locale per la direzione verticale.

Concludo che è un punto di sella.

(fate la stessa cosa per $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$)

Esercizio 3 : $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 2x - 2xy^2 - 2y^2 + y^4$

Definita e differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

(1) Punti stazionari $\nabla f = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6x + 2 - 2y^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4xy - 4y + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

$$y(-4x - 4 + 4y^2) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3x^2 + 6x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{\left(-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)} \quad (A, B)$$

$(y \neq 0)$

$$\begin{cases} -4x - 4 + 4y^2 = 0 \\ 3x^2 + 6x + 2 - 2y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = x + 1 \\ 3x^2 + 6x + 2 - 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$3x^2 + 4x = 0$$

$$x(3x + 4) = 0$$

$x = 0$ $\qquad\qquad$ $x = -\frac{4}{3}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y^2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$\boxed{(0, \pm 1)}$ $\qquad\qquad$ nessuna sol.

C, D

2 Hessiana :

$$f_{xx} = 6x + 6$$

$$f_{yx} = f_{xy} = -4y$$

$$f_{yy} = -4x - 4 + 12y^2$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+6 & -4y \\ -4y & -4x-4+12y^2 \end{pmatrix}$$

in A, B : $\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$

$$6x+6 = 6\left(\cancel{-1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cancel{+6} = 2\sqrt{3}$$

$$-4x-4 = -4\left(\cancel{-1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cancel{-4} = -\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

indefinita, quindi e' un punto di sella

$$\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \qquad \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

indefinita di nuovo, quindi è un pto di sella.

in (0,0), (0,1) $H = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

$\det(H) = 48 - 16 > 0$

e $f_{xx} = 6 > 0$ $\Rightarrow$ pto di minimo loc.

(0, -1) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

$\det(H) = 48 - 16 > 0$ e $f_{xx} = 6 > 0$

$\Rightarrow$ minimo locale.

Esercizio 4: $f(x,y) = xy^2 - yx^2$

Definita e differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

(1) pti stazionari $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2xy = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - x^2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$

$$\begin{cases} x = y \\ y^2 - 2y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$\Downarrow$

$(0,0)$

$$\begin{cases} x = -y \\ y^2 + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$y^2 = 0$

$\Downarrow$

$y = 0$

$(0,0)$

Unico punto stazionario è $(0,0)$.

(2) Hessiana :

$f_{xx} = -2y$

$f_{yx} = f_{xy} = 2y - 2x$

$f_{yy} = 2x$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 2y-2x \\ 2y-2x & 2x \end{pmatrix}$$

nel pto stazionario $(0,0)$, $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Quindi non possiamo concludere nulla.

"A occhio": proviamo la retta orizzontale e verticale:

$x = 0$ $\quad g(y) = f(0,y) = 0y^2 - y0^2 = 0$ è costante

$y=0 \qquad h(x) = f(x,0) = x0^2 - 0x^2 = 0$ " "

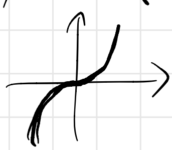
anche questo non ci dice granché.

Proviamo le bisettrici:

- $y=x \qquad g(x) = f(x,x) = x^3 - x^3 = 0$ .... è ancora costante 0...

- $y=-x \qquad g(x) = f(x,-x) = x(-x)^2 - (-x)\cdot x^2$
$$= x^3 + x^3 = 2x^3$$

lungo questa direzione, la funzione è crescente



quindi $(0,0)$ non è né max locale né min locale, né un punto di sella!
(è un "flesso")

Esercizio 2 $\qquad f(x,y) = e^{-x}(y^3 - 2xy)$

①
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x}(y^3-2xy) + e^{-x}(-2y) = e^{-x}(-y^3+2xy-2y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{-x}(3y^2-2x) \end{cases}$$

$e^{-x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -y^3+2xy-2y=0 \\ 3y^2-2x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(-y^2+2x-2)=0 \\ 3y^2-2x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$\boxed{(0,0)}$ A

$$\begin{cases} -y^2+2x-2=0 \\ \quad y^2=2x-2 \\ 3(2x-2)-2x=0 \end{cases}$$

$6x-6-2x=0$

$4x=6 \qquad x=\frac{3}{2}$

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y^2=3-2=1 \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{3}{2}, \pm 1\right)}$ B,C

② Hessiana

$f_{xx}=-e^{-x}(-y^3+2xy-2y)$

$\quad +e^{-x}(2y)$

$\quad =e^{-x}(y^3-2xy+2y+2y)$

$f_{xy}=f_{yx}=e^{-x}(-3y^2+2x-2)$

$f_{yy}=e^{-x}(6y)$

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} e^{-x}(y^3-2xy+4y) & e^{-x}(-3y^2+2x-2) \\ e^{-x}(-3y^2+2x-2) & 6e^{-x}y \end{pmatrix}$$

in A $\quad H(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\det = -4 < 0 \rightsquigarrow$ indefinita $\rightarrow$ sella

in B, C, $\left(\frac{3}{2}, +1\right)$ $\begin{pmatrix} e^{-\frac{3}{2}}(1-3+4) & e^{-\frac{3}{2}}(-3+3-2) \\ -2e^{-\frac{3}{2}} & 6e^{-\frac{3}{2}} \cdot 1 \end{pmatrix}$

$$= e^{-3/2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det = 12 - 4 = 8 > 0$$

$$f_{xx} = e^{-3/2} \cdot 2 > 0$$

$\Rightarrow$ definita positiva, e il pto e' min loc.

in $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ $e^{-\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} -1+3-4 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

$$e^{-3/2}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\det = 12 - 4 = 8 > 0$$

$$f_{xx} = e^{-3/2} \cdot (-2) < 0$$

$\Rightarrow$ definita negativa, e il punto è di massimo locale.