Esercizi su equazioni differenziali

1. In un'epidemia, ogni giorno ci sono 5000 nuovi infetti, mentre le guarigioni avvengono con un tasso di $\frac{1}{14 \text{ giorni}}$.

   (a) Scrivere l'equazione differenziale che determina l'andamento del numero di infetti $I(t)$.

   (b) Simulare l'andamento dell'epidemia lungo 90 giorni consecutivi, a partire da $I(0) = 100$ infetti, utilizzando il metodo di Eulero esplicito. Tracciare un grafico del numero di infetti rispetto al tempo.

   (c) Ripetere la simulazione usando `ode45`.

   (d) Trovare il punto di equilibrio del sistema. È stabile? Numericamente, la soluzione converge al punto di equilibrio?

   (e) (*) Sapete trovare una formula per la soluzione di questa equazione differenziale?

2. Una molla oscilla avanti e indietro secondo l'equazione differenziale

$$y''(t) = -\beta y'(t) - ky(t), \tag{1}$$

   dove $y(t)$ rappresenta lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio, β è un coefficiente che misura di quanto le oscillazioni vengono attenuate nel tempo (attrito), e k è un coefficiente che indica quanta forza serve per comprimere la molla. Questa è un'equazione del secondo ordine (compare la derivata seconda!), ma possiamo convertirla in un sistema di due equazioni del primo ordine aggiungendo una variabile $z(t) = y'(t)$: si ha

$$\begin{cases} y'(t) = z(t), \\ z'(t) = -\beta z(t) - ky(t). \end{cases}$$

   (a) Simulare lungo l'intervallo $[0, 10]$ il comportamento di una molla con $k = 10$, $\beta = 0.5$, quando viene lasciata libera in una posizione iniziale $y(0) = 100$ e con velocità iniziale $y'(0) = z(0) = 0$, usando sia il metodo di Eulero esplicito che `ode45`. Tracciare, in entrambi i casi, un grafico dello spostamento della molla $y(t)$ rispetto al tempo.

   (b) Trovare il punto di equilibrio del sistema. È stabile? Numericamente, la soluzione converge al punto di equilibrio?

   (c) Ora ripetete la simulazione con $\beta = 0$ (assenza di attrito). Stesse domande: qual è il punto di equilibrio? La soluzione ci converge?

(d) Cosa succederebbe invece se avessimo $\beta = -0.5$ (coefficiente di attrito negativo, quindi la molla accelera nel tempo invece che frenare)? È una situazione fisicamente impossibile, ma possiamo comunque risolvere il sistema.

(e) (*) Sapete trovare una formula per la soluzione di questa equazione differenziale?

Soluzioni

1. (a) 5000 è un *flusso*, cioè una quantità costante di nuovi infetti aggiunta alla derivata. $\frac{1}{14}$ è un *tasso*, cioè il numero di nuovi infetti cresce proporzionalmente al numero attuale di infetti $I(t)$: se ho 14 infetti, mi aspetto che in un giorno dato ne guarisca uno; se ho 28 infetti, mi aspetto che ne guariscano due... Quindi l'equazione è

$$I'(t) = 5000 - \frac{1}{14} I(t).$$

(b)
```
a = 0;
b = 90;
n = 1000;
h = (b-a) / n;

t = zeros(1, n+1);
I = zeros(1, n+1);
t(1) = a;
I(1) = 100;

for k = 1:n
    t(k+1) = t(k) + h;
    I(k+1) = I(k) + h*(5000 - I(k)/14);
end
plot(t, I)

[t, I] = ode45(@(t, I) 5000 - I/14, [0 90], 100);
plot(t, I)
```

(d) Detto $f(I) = 5000 - \frac{1}{14} I$ il termine a destra dell'uguale nell'equazione differenziale, dobbiamo risolvere $0 = f(I) = 5000 - \frac{1}{14} I$, che dà $I = 5000 \cdot 14 = 70000$. La matrice delle derivate (Jacobiana) è

$$[\frac{\partial f}{\partial I}] = [-\frac{1}{14}].$$

Poiché il suo unico elemento (che è anche il suo autovalore) è negativo, il sistema è stabile. Il risultato numerico della simulazione nei punti precedenti conferma che (con il valore iniziale dato) il numero di infetti tende a 70000.

(e) L'equazione differenziale è lineare, con $a(t) = \frac{1}{14}$, $b(t) = 5000$. Dobbiamo trovare una primitiva

$$A(t) = \int -\frac{1}{14} \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{14} t,$$

e inserirla nella formula

$$\begin{aligned}
I(t) &= \exp(A(t)) \left(\int \exp(-A(t)) b(t)\, \mathrm{d}t + C \right) \\
&= e^{-\frac{1}{14}t} \left(\int e^{\frac{1}{14}t} 5000\, \mathrm{d}t + C \right) \\
&= e^{-\frac{1}{14}t} C + e^{\frac{1}{14}t} (14 e^{\frac{1}{14}t} 5000) \\
&= e^{-\frac{1}{14}t} C + 14 \cdot 5000 \\
&= e^{-\frac{1}{14}t} C + 70000.
\end{aligned}$$

Si ha $I(0) = C + 70000$, quindi dobbiamo scegliere $C = -69900$ per avere il valore iniziale $I(0) = 100$.

2. (a)
```
a = 0;
b = 10;
n = 1000;
h = (b-a)/n;

K = 10;
beta = 0.5;

t = zeros(1, n+1);
y = zeros(1, n+1);
z = zeros(1, n+1);
t(1) = a;
y(1) = 100;
z(1) = 0;

for k = 1:n
    t(k+1) = t(k) + h;
    y(k+1) = y(k) + h*z(k);
    z(k+1) = z(k) + h*(-beta*z(k) - K*y(k));
end
plot(t,y)

beta = 0.5;
K = 10;
f = @(t,x) [x(2); -beta*x(2) - K*x(1)];
[t, x] = ode45(f, [0, 10], [100; 0]);
plot(t, x(1:end, 1));
```

(b) Se scriviamo l'equazione nella forma $x'(t) = f(x(t))$, dove

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

è un vettore, dobbiamo risolvere il sistema $f(x) = 0$, cioè

$$\begin{cases} z = 0, \\ -\beta z - ky = 0. \end{cases}$$

La soluzione è $z = y = 0$. La matrice Jacobiana di f è

$$Jf = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\beta \end{bmatrix}$$

(la prima colonna contiene le derivate rispetto a y, la seconda alle derivate rispetto a z). I suoi autovalori sono le soluzioni di $-\lambda(-\lambda - \beta) + k = 0$, cioè

$$\lambda_{12} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4k}}{2}. \tag{2}$$

Con i valori di β, k dati, si hanno due autovalori complessi con parte reale negativa, quindi il sistema è stabile. Le soluzioni numeriche calcolate più sopra confermano convergenza al punto $(0, 0)$ (se le si calcola su un intervallo di tempo più lungo di $[0, 10]$).

(c) Se $\beta = 0$, il punto di equilibrio è sempre $(0, 0)$, però questa volta non è stabile (due autovalori con parte reale 0). Il grafico ha oscillazioni della che non si riducono di grandezza, e non si ha convergenza.

(d) Se $\beta < 0$, il punto di equilibrio è instabile, e la simulazione numerica mostra che le oscillazioni *aumentano* di ampiezza anziché diminuire.

(e) Abbiamo visto a lezione una formula risolutiva per le equazioni del secondo ordine della forma (1). Nel dettaglio, dobbiamo trovare le due soluzioni di $\alpha^2 + \beta\alpha + k$, che sono esattamente i due autovalori λ_{12} in (2). Nel caso in cui $\beta^2 - 4k < 0$, in particolare, si tratta di due soluzioni complesse coniugate $\gamma \pm \omega i$, con $\gamma = \frac{-\beta}{2}$ e $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4k - \beta^2}$, ea soluzione generale dell'equazione differenziale (1) è

$$y(t) = c_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega t) + c_2 e^{-\gamma t} \cos(\omega t).$$