CALCOLO NUMERICO

Corso di Laurea in Informatica

A.A. 2020/2021 – Correzione II Prova in Itinere 25/05/2021

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

1. Imponendo le condizioni per la predominanza diagonale si ha $|\alpha| < 1$ e $|\beta| < 1$.

2. Per il calcolo della matrice di iterazione $G = M^{-1}N$ del metodo di Gauss-Seidel si osserva che M è una matrice elementare di Gauss da cui

$$G = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \beta & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha \\ 0 & \dots & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix}.$$

   Essendo G triangolare superiore si ha $\rho(G) = |\alpha\beta|$ da cui la condizione $|\alpha\beta| < 1$ necessaria e sufficiente per la convergenza.

3. La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha \\ \beta & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

   Per $\lambda \neq 0$ si ha dal calcolo della fattorizzazione LU

$$\lambda I - J = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -\beta/\lambda & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & & & -\alpha \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda & -\alpha \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - \beta\alpha/\lambda \end{bmatrix}$$

   da cui $\det(\lambda I - J) = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - \beta\alpha)$. Segue che $\rho(J) = \sqrt{|\alpha\beta|}$ da cui la condizione $|\alpha\beta| < 1$ necessaria e sufficiente per la convergenza.

Esercizio 2

1. Si ha $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = 1 - e^{-x} \geq 0 \iff x \geq 0$, $f(0) = -1 < 0$ e $f''(x) = e^{-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Segue il seguente grafico approssimativo della funzione da cui si conclude l'esistenza di due soluzioni reali con $-2 \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq 2$.

2. Per $x_0 = -2$ si ha convergenza ad α per il teorema di convergenza in largo. Per $x_0 = -1$ si ha $x_1 \leq -2$ e quindi convergenza ad α per il teorema di convergenza in largo. Per $x_0 = 0$ la successione non è definita. Per $x_0 = 2$ si ha convergenza a β per il il teorema di convergenza in largo. Infine per $x_0 = 1$ si ha $x_1 \geq 2$ e quindi convergenza a β per il teorema di convergenza in largo.

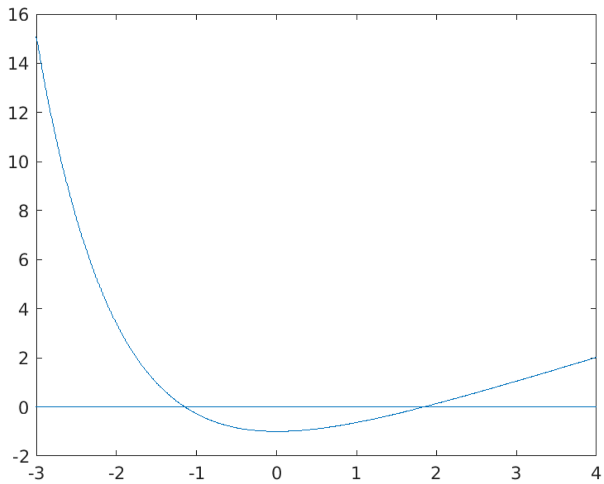

Figure 1: Grafico della funzione $f(x)$