

# CALCOLO NUMERICO

## Corso di Laurea in Informatica

A.A. 2020/2021 – Correzione I Prova in Itinere 23/03/2021

---

NOME

COGNOME

MATRICOLA

---

### Esercizio 1

1. Posto  $A = A_n$  la matrice di ordine  $n$ , dal teorema di esistenza ed unicità segue che  $A$  ammette unica la fattorizzazione LU per ogni  $\alpha \neq 0$ . Quando  $\alpha = 0$  la matrice è triangolare superiore e quindi ammette fattorizzazione LU. Si osserva che in tal caso la fattorizzazione non è unica. Infatti possiamo scrivere  $A_n = I_n A_n$  ma anche  $A_n = E_n A_n$  dove  $E_n$  è ottenuta da  $I_n$  modificando gli elementi nulli nella prima colonna.
2. Per  $\alpha = 0$  la matrice è singolare. Per  $\alpha \neq 0$  dal calcolo della fattorizzazione LU si ottiene

$$\det A = \det U = \det \begin{bmatrix} \alpha & & & \alpha \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 - \alpha \end{bmatrix},$$

da cui  $\det A = \alpha(1 - \alpha)$  e quindi  $A$  è invertibile se e solo se  $\alpha \neq 0$  e  $\alpha \neq 1$ .

3. Dal calcolo dell'inversa di  $U$  si ricava

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\alpha & & & -1/(1 - \alpha) \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1/(1 - \alpha) \end{bmatrix}$$

e quindi  $\mathcal{K}_\infty(U) = \max\{2|\alpha|, 1, |1 - \alpha|\} \max\{1, 1/|\alpha| + 1/|1 - \alpha|\}$ . Segue che  $U$  risulta mal condizionata per  $\alpha \simeq 0, 1$  e  $|\alpha| \rightarrow +\infty$ .

### Esercizio 2

1. Si ha  $\epsilon_{in} \doteq c_x \epsilon_x$  con  $c_x = 1/\log(x)$ . Segue che  $|\epsilon_{in}| \leq (1/|\log(x)|)u$  e quindi il problema è mal condizionato per  $x \simeq 1$ .
2. Dall'analisi dei grafi associati segue che

$$\epsilon_{alg_1} = \epsilon_1 + 1/\log(x/y)\epsilon_2, \quad |\epsilon_{alg_1}| \leq (1 + 1/|\log(x/y)|)u,$$

e

$$\epsilon_{alg_2} = \epsilon_1 + \log(x)/\log(x/y)\epsilon_2 - \log(y)/\log(x/y)\epsilon_3,$$

ovvero

$$|\epsilon_{alg_2}| \leq (1 + (|\log(x)| + |\log(y)|)/|\log(x/y)|)u.$$

Per  $x \simeq y$  la scelta è ininfluenta a meno di assumere  $x \simeq y \simeq 1$  dove il secondo algoritmo risulta preferibile.